Eco Industry
Oriented University

ALJABAR LINEAR

Teknik Pertambangan

Penulis ;

Bakti Siregar, M.Sc., CDS.

Edisi Pertama

Aljabar Linear

Bakti Siregar, M.Sc.,CDS

Table of contents

Aljabar Linear merupakan cabang matematika yang memegang peranan penting dalam berbagai aspek teknik pertambangan. Seiring dengan kemajuan teknologi dan ilmu data, Aljabar Linear menjadi semakin relevan, terutama dalam pengelolaan sumber daya mineral, eksplorasi tambang, dan optimasi proses produksi. Buku ini bertujuan untuk memberikan pemahaman yang mendalam tentang teori dasar Aljabar Linear serta penerapannya dalam konteks modern, di mana analisis data dan optimasi keputusan sangat penting dalam operasi tambang dan pengambilan keputusan strategis.

Dalam teknik pertambangan, Aljabar Linear digunakan dalam pemodelan geostatistik, analisis risiko, simulasi tambang, serta prediksi cadangan mineral. Konsep-konsep seperti vektor, matriks, dan transformasi linear sangat berguna untuk menyelesaikan berbagai masalah teknis, seperti optimasi penjadwalan tambang, perhitungan volume cadangan mineral, serta analisis kestabilan lereng tambang.

Dengan demikian, pemahaman terhadap Aljabar Linear merupakan hal yang krusial bagi para insinyur pertambangan untuk meningkatkan efisiensi dan akurasi dalam berbagai proses eksplorasi dan produksi.

Kata Pengantar

Aljabar Linear merupakan cabang matematika yang berfokus pada vektor, matriks, dan sistem persamaan linear. Konsep-konsep ini tidak hanya bersifat teoritis, tetapi juga memiliki aplikasi yang luas dalam berbagai bidang, termasuk **Teknik Pertambangan**. Dalam buku ini, saya menyajikan materi secara sistematis dan mudah dipahami, dengan penekanan pada penerapan praktis yang relevan dengan industri pertambangan.

Buku ini dirancang khusus untuk dapat mengintegrasikan teori Aljabar Linear dengan aplikasi praktis yang relevan, memberikan pembaca pemahaman mendalam tentang bagaimana konsep-konsep matematis dapat diterapkan untuk memecahkan masalah nyata dalam industri pertambangan. Selain itu, setiap bab dilengkapi dengan contoh kasus dan latihan yang membantu memperkuat pemahaman dan keterampilan analitis pembaca. Buku ini juga menyajikan penjelasan yang jelas dan sistematis, sehingga cocok bagi pembaca dengan berbagai tingkat pemahaman. Dengan pendekatan yang komprehensif dan berbasis praktik, buku ini menjadi sumber daya yang sangat berharga bagi mahasiswa, akademisi, dan profesional yang ingin memperdalam pengetahuan mereka dalam Aljabar Linear dan aplikasinya dalam bidang teknik pertambangan.

Tentang Penulis

Bakti Siregar M.Sc., CDS

Bakti bekerja sebagai Dosen di Program Sains Data ITSB. Beliau meraih gelar Magister dari Departemen Matematika Terapan di National Sun Yat Sen University, Taiwan. Selain mengajar, Bakti juga bekerja sebagai Data Scientist Freelance untuk perusahaan-perusahaan terkemuka seperti JNE, Samora Group, Pertamina, dan PT. Green City Traffic. Beliau memiliki antusiasme khusus dalam mengerjakan proyek (pengajaran) di bidang Big Data Analytics, Machine Learning, Optimisasi, dan Analisis Deret Waktu dalam bidang keuangan dan investasi. Keahlian utama beliau terletak pada bahasa pemrograman statistik seperti R Studio dan Python. Beliau juga berpengalaman dalam menerapkan sistem basis data seperti MySQL/NoSQL untuk manajemen data dan mahir dalam menggunakan alat Big Data seperti Spark dan Hadoop. Beberapa proyek beliau dapat dilihat di tautan berikut: Rpubs, Github, Website, dan Kaggle.

Ucapan Terima Kasih

Saya ingin mengucapkan terima kasih yang tulus kepada semua pihak yang telah mendukung dan berkontribusi dalam penyusunan buku ini. Pertama-tama, saya menghargai keluarga dan teman-teman saya yang selalu memberikan dorongan dan motivasi dalam setiap langkah proses penulisan. Terima kasih kepada para dosen dan mentor yang telah berbagi pengetahuan dan pengalaman berharga, serta memberikan masukan yang konstruktif. Saya juga berterima kasih kepada para pembaca yang telah meluangkan waktu untuk membaca dan mengevaluasi buku ini, karena umpan balik mereka sangat berharga untuk perbaikan di masa depan. Semoga buku ini dapat memberikan manfaat bagi banyak orang dan menjadi sumber inspirasi bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya dalam bidang Aljabar Linear dan teknik pertambangan.

Umpan Balik & Saran

Umpan balik dan saran dari pembaca sangat penting untuk peningkatan kualitas buku ini di masa depan. Kami mengajak semua pembaca untuk memberikan tanggapan mengenai isi, struktur, dan kejelasan penjelasan yang terdapat dalam buku ini. Saran tentang topik tambahan yang mungkin perlu ditambahkan atau aspek tertentu yang perlu diperjelas sangat dihargai, sehingga kami dapat melakukan perbaikan dan memperkaya materi dalam edisi mendatang. Dengan dukungan dan kontribusi dari pembaca, kami berharap buku ini dapat terus berkembang dan menjadi referensi yang lebih baik dalam memahami Aljabar Linear dan aplikasinya di bidang teknik pertambangan. Terima kasih atas perhatian dan partisipasi Anda!

Pembaca/pengguna yang ingin memberikan umpan balik dan saran dipersilakan untuk melakukannya melalui informasi kontak di bawah ini:

- dsciencelabs@outlook.com
- siregarbakti@gmail.com
- siregarbakti@itsb.ac.id

Chapter 1

Pengantar Aljabar Linear

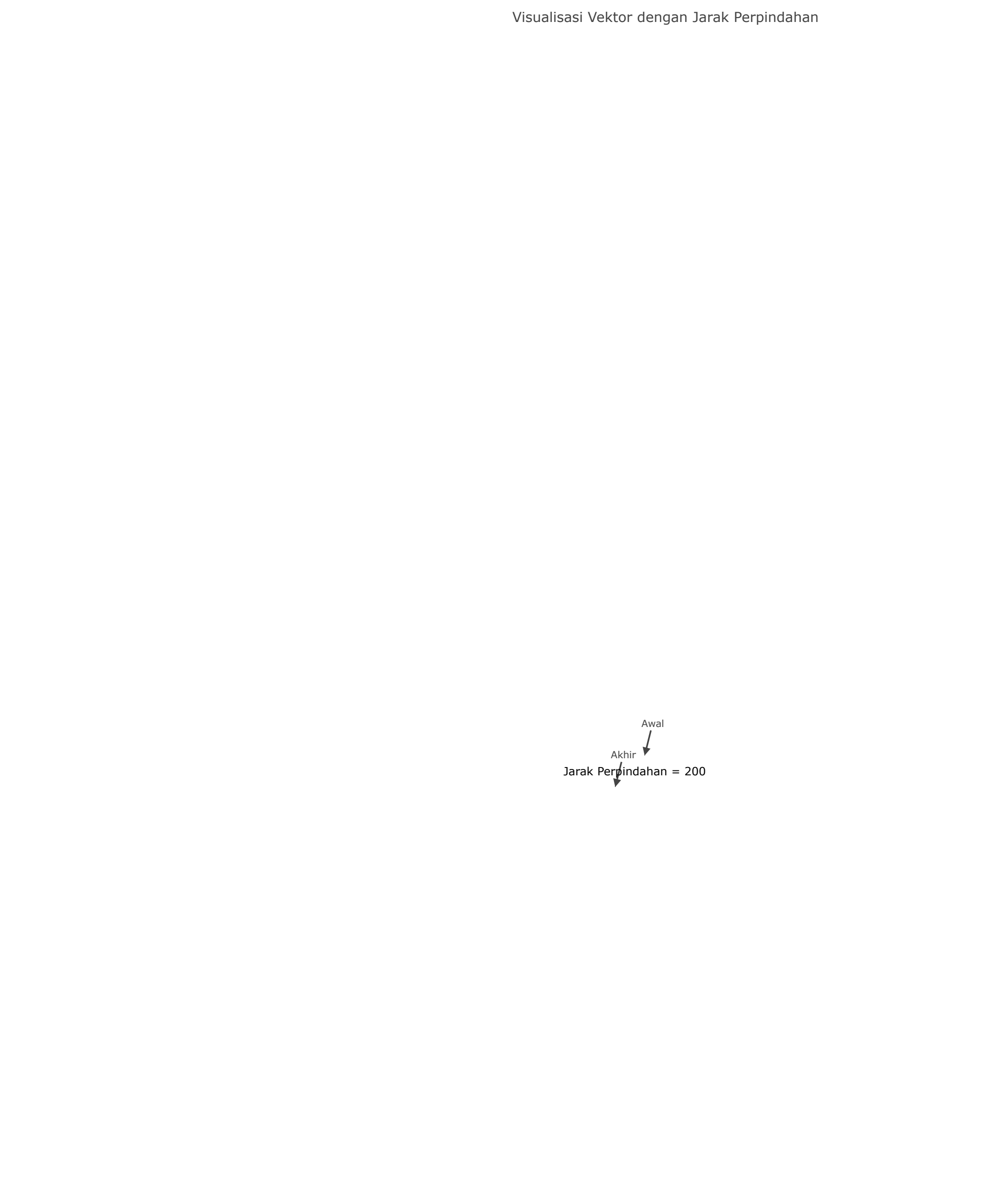
"Aljabar linear adalah kunci untuk memahami matematika tingkat lanjut, karena menyediakan cara yang terpadu untuk menangani sistem persamaan, transformasi, dan banyak konsep lainnya." – Lay (2012)

1.1 Konsep Dasar Aljabar Linear

Aljabar Linear adalah cabang matematika yang berfokus pada studi vektor, matriks, dan sistem persamaan linear. Dalam konteks teknik pertambangan, pemahaman tentang Aljabar Linear sangat penting karena banyak aplikasi dalam pemodelan geologi, pengolahan data, dan optimasi proses.

1.1.1 Vektor

Definisi: Vektor adalah entitas matematis yang memiliki arah dan magnitudo. Dalam teknik pertambangan, vektor sering digunakan menggambarkan vektor posisi, perpindahan, dan gaya yang bekerja pada alat berat di tambang.



Penjelasan Visualisasi:

1. **Vektor Posisi:** Digambarkan sebagai garis biru yang menghubungkan posisi awal dan posisi akhir alat berat dalam ruang 3D.

2. **Vektor Gaya:** Vektor gaya digambarkan sebagai garis merah yang keluar dari posisi akhir alat berat, menunjukkan gaya yang bekerja di titik itu.

3. **Koordinat 3D:** Setiap sumbu mewakili arah gerakan atau gaya dalam tiga dimensi (X, Y, Z), memungkinkan kita melihat bagaimana alat berat berpindah atau terpengaruh oleh gaya dalam ruang.

1.1.2 Matriks

Dalam teknik pertambangan, matriks digunakan di berbagai aplikasi seperti simulasi komputer, optimasi sumber daya, dan pemodelan sistem tambang. Beberapa aplikasi lainnya termasuk:

- Analisis Struktural: Matriks digunakan untuk menganalisis distribusi tekanan dan tegangan di struktur tambang atau bangunan pendukung.
- Simulasi Transportasi: Matriks digunakan untuk memodelkan aliran material di jaringan transportasi dalam tambang.
- Pemrosesan Citra: Matriks digunakan untuk memproses citra dari tambang, seperti gambar udara atau hasil pemindaian tanah.

Contoh: Misalkan kita memiliki matriks berikut yang mewakili konsentrasi tiga jenis mineral di tiga lokasi tambang:

```
         Mineral A Mineral B Mineral C
Lokasi 1        10        12        14
Lokasi 2        15         9         7
Lokasi 3        20        22        18
```

Di sini, setiap baris bisa mewakili lokasi berbeda, dan setiap kolom bisa mewakili konsentrasi mineral yang berbeda.

1.1.3 Sistem Persamaan Linear

Definisi: Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan yang memiliki variabel yang sama. Dalam konteks pertambangan, sistem ini dapat digunakan untuk menghitung variabel-variabel yang saling berhubungan.

Misalkan kita memiliki tiga jenis mineral yang ditambang:

1. **Keuntungan dari Mineral A**:

$$z_1 = 2x + 3y + 1$$

2. **Keuntungan dari Mineral B**:

$$z_2 = 4x - y + 5$$

3. **Keuntungan dari Mineral C**:

$$z_3 = -x + 2y - 2$$

Di sini, x adalah jumlah mineral A yang ditambang, y adalah jumlah mineral B yang ditambang, dan z_1, z_2, dan z_3 adalah keuntungan yang dihasilkan dari masing-masing mineral.

Visualisasi Sistem Persamaan Linear dalam Pertambangan

Melalui visualisasi sistem persamaan linear, perusahaan pertambangan dapat mendapatkan wawasan berharga tentang bagaimana variasi dalam jumlah mineral yang ditambang mempengaruhi keuntungan. Analisis ini membantu dalam perencanaan dan pengambilan keputusan strategis yang berkaitan dengan operasi pertambangan.

1.2 Sejarah dan Perkembangan Aljabar Linear

Aljabar Linear telah ada sejak zaman kuno, dengan catatan penggunaan metode geometris untuk menyelesaikan masalah aljabar. Pada abad ke-19, beberapa matematikawan, termasuk **Carl Friedrich Gauss**, mengembangkan metode sistematis untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, yang dikenal sebagai **eliminasi Gauss**. Penemuan teori ruang vektor dan basis oleh matematikawan seperti **Hermann Grassmann** memperluas aplikasi Aljabar Linear dalam analisis matematis.

Seiring dengan perkembangan teknologi, Aljabar Linear menjadi semakin penting dalam teknik pertambangan. Penggunaan perangkat lunak analisis data dan pemodelan geospasial yang berbasis Aljabar Linear telah membantu insinyur pertambangan untuk membuat keputusan yang lebih baik dan lebih efisien.

1.3 Penerapan Aljabar Linear

Aljabar Linear memiliki berbagai aplikasi dalam teknik pertambangan, antara lain:

1.3.1 Pemodelan Geologi

Aljabar Linear digunakan untuk membuat model geologi dari data eksplorasi. Ini melibatkan representasi data sebagai matriks dan penggunaan operasi matematis untuk menghasilkan model yang dapat membantu dalam memprediksi lokasi cadangan mineral.

Contoh: Dalam pemodelan geologi, kita bisa menggunakan matriks untuk menggambarkan hubungan antara berbagai parameter geologis seperti kedalaman, konsentrasi mineral, dan jenis batuan. Dengan menggunakan metode analisis, kita dapat memperkirakan potensi cadangan mineral.

1.3.2 Optimasi Proses Pertambangan

Aljabar Linear digunakan untuk memecahkan masalah optimasi, seperti menentukan rute transportasi yang paling efisien untuk mengangkut material tambang.

Contoh: Misalkan kita memiliki beberapa titik pengangkutan dan tujuan. Kita bisa menggunakan matriks untuk merepresentasikan biaya transportasi antara titik-titik tersebut dan menerapkan metode optimasi seperti **linear programming** untuk menemukan rute yang paling efisien.

1.3.3 Analisis Data

Teknik analisis data seperti analisis komponen utama *Principle Component Analysis (PCA)*, yang berbasis Aljabar Linear, digunakan untuk mengidentifikasi pola dalam data eksplorasi dan membantu dalam pengambilan keputusan.

Contoh: Misalkan kita memiliki data yang besar dari berbagai lokasi pertambangan. Dengan menerapkan PCA, kita dapat mereduksi dimensi data dan menemukan variabel utama yang paling berkontribusi terhadap variasi dalam data tersebut.

1.3.4 Sistem Persamaan Linear

Dalam konteks pertambangan, sistem persamaan linear dapat digunakan untuk menghitung variabel-variabel yang saling berhubungan. Berikut adalah beberapa contoh konkret:

Contoh 1: Analisis Aliran Air dalam Tambang

Dalam tambang, aliran air dapat mempengaruhi proses penambangan. Misalkan kita memiliki tiga zona dalam tambang yang memiliki laju aliran air yang berbeda. Kita ingin menentukan laju aliran air total yang keluar dari setiap zona berdasarkan beberapa variabel yang berhubungan.

Misalkan:

- (x_1): laju aliran dari zona A (m^3/jam)
- (x_2): laju aliran dari zona B (m^3/jam)
- (x_3): laju aliran dari zona C (m^3/jam)

Dari pengukuran, kita dapat menyusun sistem persamaan linear berikut:

$$
\begin{aligned}
&1. \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 50 \quad \text{(Total laju aliran dari Zona A)} \\
&2. \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 80 \quad \text{(Total laju aliran dari Zona B)} \\
&3. \quad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 120 \quad \text{(Total laju aliran dari Zona C)}
\end{aligned}
$$

Kita dapat menggunakan metode eliminasi Gauss atau metode matriks untuk menyelesaikan sistem ini dan menemukan nilai x_1, x_2, dan x_3.

Contoh 2: Penjadwalan Produksi

Dalam perencanaan produksi di tambang, kita perlu menentukan jumlah mineral yang harus ditambang dari beberapa lokasi untuk memenuhi permintaan pasar. Misalkan kita memiliki tiga lokasi dengan permintaan dan kapasitas sebagai berikut:

- Lokasi 1: Permintaan = 100 ton, Kapasitas = 150 ton
- Lokasi 2: Permintaan = 80 ton, Kapasitas = 120 ton
- Lokasi 3: Permintaan = 70 ton, Kapasitas = 100 ton

Misalkan kita menggunakan variabel:

- x_1: jumlah mineral yang ditambang dari lokasi 1 (ton)
- x_2: jumlah mineral yang ditambang dari lokasi 2 (ton)
- x_3: jumlah mineral yang ditambang dari lokasi 3 (ton)

Kita dapat menyusun sistem persamaan linear sebagai berikut:

1. $x_1 + x_2 + x_3 = 250$ (Total mineral yang ditambang)
2. $x_1 \leq 150$ (Kapasitas lokasi 1)
3. $x_2 \leq 120$ (Kapasitas lokasi 2)
4. $x_3 \leq 100$ (Kapasitas lokasi 3)
5. $x_1 \geq 100$ (Permintaan lokasi 1)
6. $x_2 \geq 80$ (Permintaan lokasi 2)
7. $x_3 \geq 70$ (Permintaan lokasi 3)

Dari sini, kita dapat menggunakan metode optimasi (seperti Program Linear) untuk menentukan nilai x_1, x_2, dan x_3 yang optimal.

Contoh 3: Penentuan Konsentrasi Mineral

Misalkan kita ingin menentukan konsentrasi mineral dalam tiga sampel tanah yang diambil dari lokasi berbeda di tambang. Misalkan kita memiliki data konsentrasi mineral sebagai berikut:

- Sampel 1: Konsentrasi emas = a_1, konsentrasi perak = b_1, konsentrasi tembaga = c_1
- Sampel 2: Konsentrasi emas = a_2, konsentrasi perak = b_2, konsentrasi tembaga = c_2
- Sampel 3: Konsentrasi emas = a_3, konsentrasi perak = b_3, konsentrasi tembaga = c_3

Dengan x_1, x_2, dan x_3 sebagai variabel yang menunjukkan jumlah mineral yang akan diambil dari masing-masing sampel. Kita dapat menyusun sistem persamaan sebagai berikut:

1. $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \text{Target Emas}$
2. $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = \text{Target Perak}$
3. $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = \text{Target Tembaga}$

Dengan cara ini, kita dapat menghitung jumlah mineral dari setiap sampel yang perlu diambil untuk mencapai target konsentrasi mineral yang diinginkan.

1.3.5 Sistem Persamaan Linear dalam Simulasi

Model matematis yang dihasilkan dari sistem persamaan linear digunakan untuk mensimulasikan berbagai skenario dalam operasi tambang.

Contoh: Kita bisa membuat model untuk memprediksi aliran air di sekitar tambang dengan menggunakan sistem persamaan linear yang menggambarkan hubungan antara berbagai variabel, seperti curah hujan, permeabilitas tanah, dan pengambilan air dari sumur.

Chapter 2

Vektor

Aljabar linear, khususnya konsep vektor dan matriks, merupakan alat penting dalam berbagai aspek Teknik Pertambangan. Dalam dunia pertambangan, teknik ini digunakan untuk menganalisis data, memodelkan sistem geologi, serta merancang dan mengoptimalkan proses penambangan.

Penguasaan konsep vektor dan matriks tidak hanya memberikan dasar yang kuat dalam aljabar linear, tetapi juga memungkinkan mahasiswa Teknik Pertambangan untuk menerapkan metode matematis dalam analisis dan pengambilan keputusan di lapangan. Mahasiswa-i teknik pertambangan dapat dioptimalkan untuk meningkatkan efisiensi dan keamanan dalam operasi penambangan.

2.1 Vektor

Vektor digunakan untuk merepresentasikan berbagai parameter yang terkait dengan lokasi dan orientasi dalam ruang. Misalnya, vektor dapat digunakan untuk menggambarkan:

- **Posisi dan Arah:** Vektor posisi digunakan untuk menunjukkan lokasi titik-titik penting di dalam area tambang, seperti posisi sumur bor atau titik pengambilan sampel.
- **Gaya dan Vektor Kecepatan:** Dalam mekanika batuan, vektor digunakan untuk menggambarkan gaya yang bekerja pada bahan galian dan vektor kecepatan untuk memodelkan pergerakan material.

2.1.1 Definisi Vektor

Vektor adalah objek matematika yang memiliki dua sifat utama: **arah** dan **magnitude** (besar). Vektor dapat dipandang sebagai suatu kuantitas yang memiliki informasi mengenai seberapa besar dan ke mana suatu nilai atau kondisi mengarah. Dalam aljabar linear, vektor digunakan untuk merepresentasikan berbagai jenis data dan hubungan dalam ruang multidimensi.

2.1.2 Ciri-ciri Vektor

- **Magnitude**: Menggambarkan seberapa besar atau kuat vektor tersebut. Magnitude biasanya dihitung menggunakan rumus Pythagoras pada vektor dalam dua atau tiga dimensi.
- **Arah**: Menunjukkan ke mana vektor tersebut mengarah. Arah dapat dinyatakan dalam derajat, radian, atau sebagai sudut terhadap sumbu koordinat.
- **Dimensi**: Vektor dapat memiliki dimensi satu (vektor baris atau kolom), dua, tiga, atau lebih, tergantung pada jumlah komponen yang dimiliki. Sebuah vektor dalam n-dimensi biasanya dituliskan sebagai:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

2.1.3 Notasi Vektor

Vektor sering kali dilambangkan dengan huruf tebal (misalnya, $\mathbf{v}$) atau dengan tanda panah di atas huruf (misalnya, $\vec{v}$). Notasi ini membedakan vektor dari skalar, yang hanya memiliki magnitude tanpa arah.

2.1.4 Operasi pada Vektor

Penjumlahan/Pengurangan Vektor

Dua vektor dapat dijumlah/dikurang jika mereka memiliki dimensi yang sama. Penjumlahan dilakukan dengan menjumlahkan komponen-komponen yang sesuai.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \pm v_1 \\ u_2 \pm v_2 \\ \vdots \\ u_n \pm v_n \end{pmatrix}$$

Perkalian Skalar

Mengalikan vektor dengan bilangan (skalar) akan mengubah magnitude vektor tetapi tidak mengubah arah.

$$c \cdot \mathbf{v} = c \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{pmatrix}$$

Dot Product

Operasi ini menghasilkan skalar dan digunakan untuk menghitung sudut antara dua vektor serta menentukan apakah vektor tersebut saling tegak lurus.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n$$

Cross Product

Hanya berlaku untuk vektor dalam tiga dimensi, menghasilkan vektor baru yang tegak lurus terhadap kedua vektor yang digunakan.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Dengan pemahaman yang baik tentang vektor, mahasiswa dan profesional dapat mengaplikasikan konsep ini untuk menyelesaikan masalah yang kompleks.

2.2 Terapan Vektor

Vektor dan matriks merupakan konsep dasar dalam aljabar linear yang memiliki berbagai aplikasi dalam teknik pertambangan. Dalam konteks ini, vektor dan matriks digunakan untuk memodelkan dan menyelesaikan berbagai masalah yang berkaitan dengan eksplorasi dan ekstraksi sumber daya mineral.

2.2.1 Representasi Geometris

Vektor digunakan untuk merepresentasikan posisi, arah, dan gaya dalam ruang tiga dimensi. Dalam eksplorasi pertambangan, vektor dapat digunakan untuk menunjukkan lokasi titik pengeboran dan arah pengeboran.

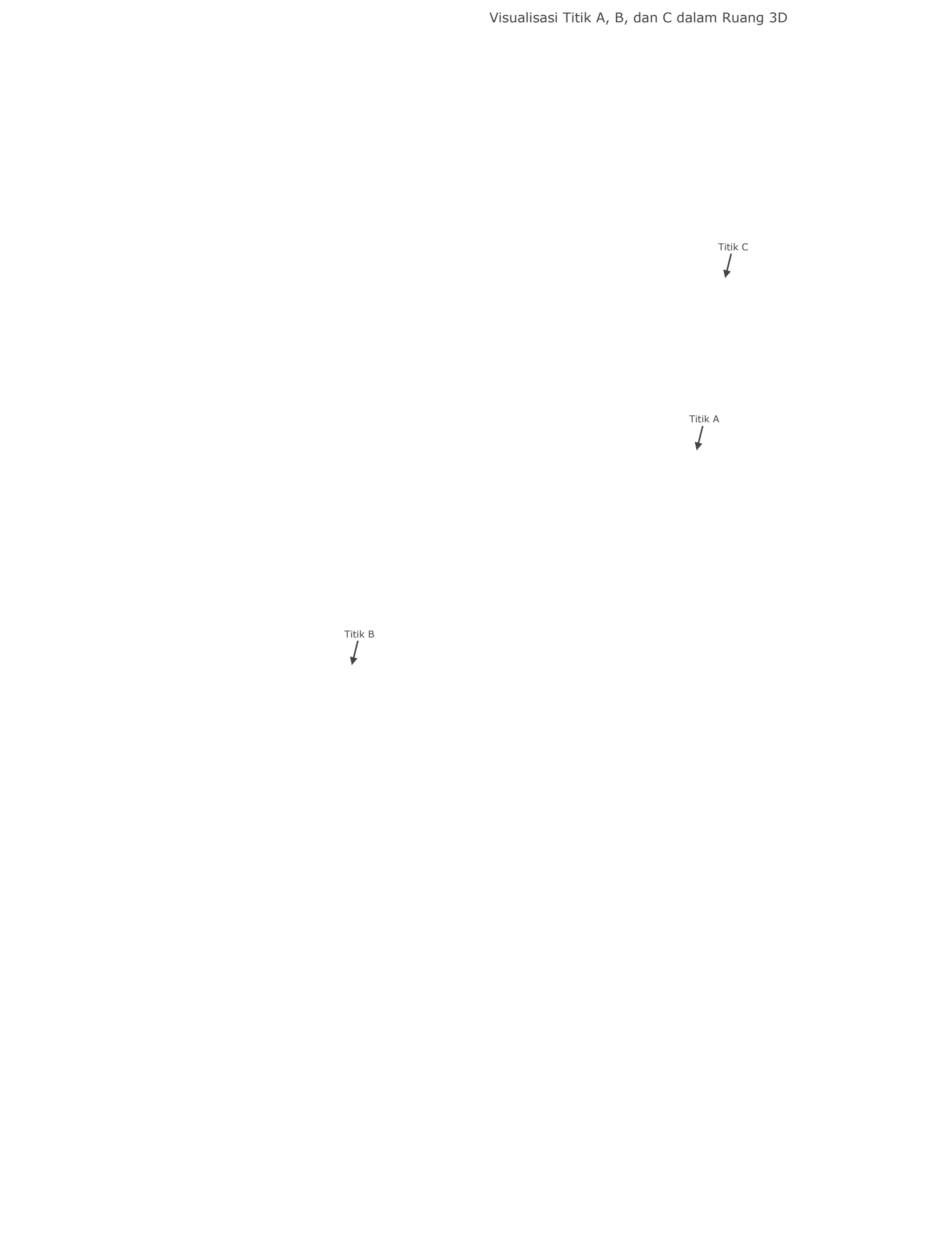
Misalkan, seorang insinyur sedang merancang jalur transportasi antara tiga titik lokasi alat berat di suatu proyek konstruksi. Titik-titik tersebut memiliki koordinat sebagai berikut:

- Titik $A : (2, 3, 5)$
- Titik $B : (4, 1, 3)$
- Titik $C : (1, 2, 6)$

Dapat dituliskan dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Perhatikan visualisasi jalur transportasi antara tiga titik lokasi alat berat di suatu proyek konstruksi tersebut adalah:



Insinyur tersebut perlu menghitung jarak antara titik A, B, dan C untuk merencanakan rute transportasi yang efisien. Mari kita hitung jarak antara setiap pasangan titik menggunakan rumus Pythagoras.

Menghitung Jarak antara Titik A dan B

Diberikan titik A dan B, kita akan menghitung jarak menggunakan rumus:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Perhitungan

- Titik A: (A(2, 3, 5))
- Titik B: (B(4, 1, 3))

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= 4 - 2 = 2 \\ y_2 - y_1 &= 1 - 3 = -2 \\ z_2 - z_1 &= 3 - 5 = -2 \end{aligned}$$

Selanjutnya, kita kuadratkan setiap selisih:

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 &= 2^2 = 4 \\ (y_2 - y_1)^2 &= (-2)^2 = 4 \\ (z_2 - z_1)^2 &= (-2)^2 = 4 \end{aligned}$$

Jumlahkan hasil kuadrat:

$$4 + 4 + 4 = 12$$

Ambil akar kuadrat dari jumlah tersebut:

$$d_{AB} = \sqrt{12} \approx 3.46$$

Menghitung Jarak antara Titik B dan C

Selanjutnya, kita hitung jarak antara titik B dan C.

- Titik $B : B(4, 1, 3)$
- Titik $C : C(1, 2, 6)$

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= 1 - 4 = -3 \\ y_2 - y_1 &= 2 - 1 = 1 \\ z_2 - z_1 &= 6 - 3 = 3 \end{aligned}$$

Kuadratkan setiap selisih:

$$
\begin{aligned}
(x_2 - x_1)^2 &= (-3)^2 = 9 \\
(y_2 - y_1)^2 &= 1^2 = 1 \\
(z_2 - z_1)^2 &= 3^2 = 9
\end{aligned}
$$

Jumlahkan hasil kuadrat:

$$9 + 1 + 9 = 19$$

Ambil akar kuadrat dari jumlah tersebut:

$$d_{BC} = \sqrt{19} \approx 4.36$$

Menghitung Jarak antara Titik C dan A

Terakhir, kita hitung jarak antara titik C dan A.

- Titik $C : C(1, 2, 6)$
- Titik $A : A(2, 3, 5)$

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= 2 - 1 = 1 \\
y_2 - y_1 &= 3 - 2 = 1 \\
z_2 - z_1 &= 5 - 6 = -1
\end{aligned}
$$

Kuadratkan setiap selisih:

$$
\begin{aligned}
(x_2 - x_1)^2 &= 1^2 = 1 \\
(y_2 - y_1)^2 &= 1^2 = 1 \\
(z_2 - z_1)^2 &= (-1)^2 = 1
\end{aligned}
$$

Jumlahkan hasil kuadrat:

$$1 + 1 + 1 = 3$$

Ambil akar kuadrat dari jumlah tersebut:

$$d_{CA} = \sqrt{3} \approx 1.73$$

Ringkasan Hasil Jarak

- Jarak antara Titik A dan $B :\approx 3.46$
- Jarak antara Titik B dan $C :\approx 4.36$
- Jarak antara Titik C dan $A :\approx 1.73$

Dengan demikian, insinyur dapat merencanakan rute transportasi yang efisien berdasarkan jarak yang telah dihitung.

2.3 Analisis Gaya

Seorang insinyur pertambangan sedang menganalisis gaya yang bekerja pada sebuah alat berat yang sedang mengangkat beban di dalam terowongan. Alat berat tersebut mengangkat beban seberat 600 N ke atas dengan gaya $\vec{F_1}$ dan mendukung alat tersebut ke sisi kanan dengan gaya $\vec{F_2}$ sebesar 400 N.

1. Tentukan vektor gaya total yang bekerja pada alat berat tersebut.
2. Hitunglah magnitudo dari gaya total tersebut.
3. Jika alat berat tersebut harus bergerak ke atas dengan kecepatan tetap, berapakah gaya yang diperlukan untuk mengimbangi gaya gravitasi?

2.3.1 Pembahasan

Menentukan Vektor Gaya Total

Dari informasi yang diberikan:

$$\text{Gaya mengangkat ke atas: } \vec{F_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \end{pmatrix} \text{ N}$$

$$\text{Gaya ke sisi kanan: } \vec{F_2} = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N}$$

Untuk mendapatkan gaya total $\vec{F_{total}}$, kita jumlahkan kedua vektor gaya tersebut:

$$\vec{F_{total}} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \end{pmatrix} \text{ N}$$

Menghitung Magnitudo Gaya Total

Magnitudo dari gaya total dapat dihitung menggunakan rumus jarak Euclidean:

$$|\vec{F_{total}}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{400^2 + 600^2}$$

$$= \sqrt{160000 + 360000} = \sqrt{520000} \approx 721.11 \text{ N}$$

Gaya yang Diperlukan untuk Mengimbangi Gaya Gravitasi

Gaya gravitasi yang bekerja pada alat berat adalah 600 N (sebanding dengan berat beban yang diangkat). Agar alat berat dapat bergerak ke atas dengan kecepatan tetap, gaya yang bekerja ke atas harus sama dengan gaya gravitasi. Oleh karena itu, gaya yang diperlukan adalah:

$$\vec{F_{diperlukan}} = 600 \text{ N}$$

Visualisasi 3D Gaya pada Alat Berat

Penjelasan Visualisasi:

Vektor Gaya - Tiga vektor yang ditunjukkan:

- Gaya Mengangkat (F1): Ditarik dari titik asal (0,0) ke (0,600) dalam warna biru.
- Gaya Sisi Kanan (F2): Ditarik dari titik asal (0,0) ke (400,0) dalam warna merah.
- Gaya Total (F_total): Ditarik dari titik asal (0,0) ke (400,600) dalam warna hijau.

2.3.2 Kesimpulan

Dalam analisis ini, kita menemukan bahwa vektor gaya total yang bekerja pada alat berat adalah

$$\vec{F_{total}} = \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \end{pmatrix} \text{ N}$$

dengan magnitudo sekitar 721.11 N. Untuk menjaga alat berat bergerak ke atas dengan kecepatan tetap, gaya yang diperlukan adalah sama dengan gaya gravitasi, yaitu 600 N.

Chapter 3

Matriks

Matriks sering kali digunakan untuk mengorganisir dan menganalisis data yang kompleks. Beberapa aplikasi matriks dalam Teknik Pertambangan meliputi:

- **Sistem Persamaan Linear:** Dalam perencanaan tambang, matriks digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan yang menggambarkan hubungan antara variabel seperti volume material, biaya, dan waktu.
- **Analisis Data Geologi:** Matriks dapat merepresentasikan data geologi seperti komposisi mineral, kedalaman, dan sifat fisik dari berbagai lapisan tanah atau batuan. Analisis ini penting untuk menentukan strategi penambangan yang optimal.
- **Modeling:** Matriks digunakan dalam pemodelan geomekanika untuk menganalisis stabilitas lereng dan desain struktur bawah tanah.

3.1 Definisi Matriks

Matriks adalah susunan bilangan, simbol, atau ekspresi yang terorganisir dalam bentuk baris dan kolom. Dalam aljabar linear, matriks digunakan untuk merepresentasikan sistem persamaan linear, transformasi linier, dan berbagai operasi matematis lainnya. Matriks memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang, termasuk fisika, ekonomi, dan teknik.

3.2 Bentuk Umum Matriks

Matriks biasanya dinotasikan sebagai:

$$A = [a_{ij}]$$

atau,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini:

- a_{ij} menunjukkan elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j,
- m adalah jumlah baris,
- n adalah jumlah kolom.

Sebagai contoh, sebuah matriks berukuran 3×2 adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Dalam matriks ini, ada 3 baris dan 2 kolom.

3.3 Operasi Matriks

Beberapa operasi dasar yang dapat dilakukan pada matriks meliputi:

3.3.1 Penjumlahan dan Pengurangan

Dua matriks dapat dijumlah/dikurang jika memiliki dimensi yang sama. Penjumlahan/Pengurangan dapat dilakukan dengan menjumlahkan elemen-elemen yang sesuai.

Penjumlahan/Pengurangan dua matriks A dan B didefinisikan jika kedua matriks memiliki ukuran yang sama, yaitu memiliki jumlah baris dan kolom yang sama. Jika A dan B masing-masing adalah matriks berukuran $m \times n$, maka hasil penjumlahan $A \pm B$ adalah matriks C berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen c_{ij} yang didefinisikan sebagai:

$$C = A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Hasil penjumlahan matriks A dan B diberikan oleh:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Dengan kata lain, elemen-elemen dari matriks hasil penjumlahan C adalah hasil penjumlahan dari elemen-elemen pada posisi yang sama di matriks A dan B:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

3.3.2 Perkalian

Perkalian matriks dilakukan dengan cara mengalikan baris dari matriks pertama dengan kolom dari matriks kedua. Matriks yang dapat dikalikan memiliki aturan dimensi yang spesifik; jika matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$ dan matriks $\mathbf{B}$ berukuran $n \times p$, maka hasil perkalian $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $m \times p$.

$$C = A \times B$$

di mana elemen-elemen dari matriks C adalah:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Dimana:

- a_{ik} adalah elemen pada baris ke-i dan kolom ke-k dari matriks A.
- b_{kj} adalah elemen pada baris ke-k dan kolom ke-j dari matriks B.

Misalkan kita memiliki dua matriks A dan B sebagai berikut:

Matriks A berukuran 2×3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks B berukuran 3×2:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Untuk menghitung elemen c_{11} pada matriks hasil C, kita mengalikan baris pertama dari matriks A dengan kolom pertama dari matriks B:

$$c_{11} = (1 \times 7) + (2 \times 9) + (3 \times 11) = 7 + 18 + 33 = 58$$

Elemen c_{12} dihitung dengan mengalikan baris pertama dari matriks A dengan kolom kedua dari matriks B:

$$c_{12} = (1 \times 8) + (2 \times 10) + (3 \times 12) = 8 + 20 + 36 = 64$$

Secara lebih rinci, bentuk umum perkalian dua matriks adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Dengan elemen-elemen dari matriks hasil C sebagai berikut:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Artinya, setiap elemen c_{ij} pada matriks C merupakan hasil penjumlahan dari hasil kali elemen-elemen pada baris ke-i dari matriks A dengan elemen-elemen pada kolom ke-j dari matriks B.

3.3.3 Transpos

Transpos dari matriks $\mathbf{A}$, dilambangkan dengan $\mathbf{A}^T$, adalah matriks yang diperoleh dengan menukar baris menjadi kolom dan sebaliknya.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika elemen dari matriks A adalah a_{ij}, maka elemen dari matriks transpos A^T dapat dinyatakan sebagai:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Artinya, elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j pada matriks transpos A^T adalah sama dengan elemen pada baris ke-j dan kolom ke-i pada matriks A.

Misalkan kita memiliki matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Maka transpos dari matriks A adalah:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat Transpos:

1. **Transpos dari Transpos**
$$(A^T)^T = A$$

2. **Penjumlahan Matriks**
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

3. **Perkalian Matriks**
$$(A \times B)^T = B^T \times A^T$$

Transpos matriks merupakan operasi penting dalam aljabar linear, yang memungkinkan kita untuk melakukan berbagai manipulasi dan analisis terhadap matriks dengan mudah. Dengan memahami cara transpos matriks, kita dapat menerapkan sifat-sifat dan aturan-aturan dalam berbagai konteks matematika dan aplikasi lainnya.

3.3.4 Determinant

Determinant adalah nilai yang terkait dengan matriks persegi dan digunakan untuk menentukan apakah matriks tersebut memiliki invers.

Determinant dari matriks A berukuran $n \times n$ biasanya dilambangkan dengan $\det(A)$ atau $|A|$.

Penghitungan Determinan:

1. **Determinant Matriks 2x2**

   Untuk matriks A berukuran 2×2:
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
   Determinannya dihitung dengan rumus:
$$\det(A) = ad - bc$$

2. **Determinant Matriks 3x3**

   Untuk matriks B berukuran 3×3:
$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$
   Determinannya dihitung dengan rumus:
$$\det(B) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Sifat-sifat Determinan:

1. **Determinant Matriks Identitas**
$$\det(I) = 1$$

2. **Jika salah satu baris atau kolom dari matriks adalah nol**

$$\det(A) = 0$$

3. **Determinant dari matriks yang ditukar** Jika dua baris (atau dua kolom) dari matriks ditukar, maka determinan akan berubah tanda:

$$\det(B) = -\det(A)$$

4. **Determinant dari hasil kali matriks**

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

5. **Determinant dari matriks invers**

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Determinant adalah alat penting dalam aljabar linear, memberikan informasi mengenai sifat matriks dan digunakan dalam berbagai aplikasi, termasuk pemecahan sistem persamaan linear, analisis kestabilan, dan dalam geometri untuk menentukan volume. Memahami cara menghitung dan sifat-sifat determinan sangat penting untuk analisis matriks.

3.3.5 Invers

Invers matriks adalah matriks yang, ketika dikalikan dengan matriks asli, menghasilkan matriks identitas. Tidak semua matriks memiliki invers; hanya matriks persegi (matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama) yang dapat memiliki invers, dan matriks tersebut harus bersifat invertible, yaitu determinannya tidak sama dengan nol.

Invers dari matriks A dilambangkan dengan A^{-1}. Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka invers A^{-1} memenuhi hubungan berikut:

$$A \times A^{-1} = I$$

di mana I adalah matriks identitas berukuran $n \times n$. Cara Menghitung Invers Matriks:

1. **Metode Adjoin (Cofactor)**

   Untuk menghitung invers dari matriks A berukuran 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

   Inversnya dapat dihitung dengan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

   Dengan catatan bahwa $\det(A) \neq 0$.

2. **Metode Gauss-Jordan**

   Metode ini melibatkan pembentukan matriks augmented yang menggabungkan matriks A dengan matriks identitas dan menerapkan operasi baris elementer hingga matriks A menjadi matriks identitas. Matriks identitas yang dihasilkan di sisi kanan dari matriks augmented akan menjadi invers dari A.

Sifat-sifat Invers:

1. **Invers dari Matriks Identitas**
$$I^{-1} = I$$
2. **Invers dari Hasil Kali Matriks**
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
3. **Invers dari Invers**
$$(A^{-1})^{-1} = A$$
4. **Jika A memiliki invers, maka A^{-1} juga memiliki invers**.

Misalkan kita memiliki matriks A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Untuk menghitung inversnya, kita terlebih dahulu menghitung determinannya:

$$\det(A) = (2)(4) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$$

Karena $\det(A) \neq 0$, kita dapat menghitung invers:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Invers matriks adalah konsep fundamental dalam aljabar linear, digunakan dalam pemecahan sistem persamaan linear, analisis kestabilan, dan banyak aplikasi matematis lainnya. Memahami cara menghitung dan sifat-sifat invers sangat penting dalam analisis matriks.

$$(x_2 - x_1)^2 = 2^2 = 4$$
$$(y_2 - y_1)^2 = (-2)^2 = 4$$
$$(z_2 - z_1)^2 = (-2)^2 = 4$$

Jumlahkan hasil kuadrat:

$$4 + 4 + 4 = 12$$

Ambil akar kuadrat dari jumlah tersebut:

$$d_{AB} = \sqrt{12} \approx 3.46$$

3.4 Terapan Matriks

3.4.1 Analisis Data

Seorang ahli geologi sedang menganalisis data dari tiga lokasi pengeboran yang berbeda. Pada setiap lokasi, mereka mengukur komposisi dua jenis mineral. Hasil pengukuran tersebut disusun dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \text{Lokasi} & \text{Komposisi 1} & \text{Komposisi 2} \\ \text{A} & 0.5 & 0.7 \\ \text{B} & 0.6 & 0.8 \\ \text{C} & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Dalam matriks ini, setiap baris mewakili lokasi pengeboran, dan setiap kolom mewakili persentase komposisi mineral di setiap lokasi. Ahli geologi ingin mengetahui beberapa hal berikut:

1. **Penjumlahan komposisi total per lokasi**: Tentukan jumlah total komposisi mineral di setiap lokasi pengeboran $(A, B, danC)$.
2. **Lokasi dengan komposisi mineral tertinggi**: Di lokasi manakah total komposisi mineral (Komposisi 1 + Komposisi 2) paling tinggi?
3. **Rata-rata komposisi mineral**: Hitung rata-rata komposisi dari setiap jenis mineral (Komposisi 1 dan Komposisi 2) di semua lokasi.

Untuk menjawab pertanyaan di atas, Anda dapat menggunakan konsep dasar matriks dan operasi penjumlahan.

Langkah Penyelesaian:

1. Untuk menghitung **penjumlahan komposisi total per lokasi**, kita perlu menjumlahkan komposisi 1 dan komposisi 2 di setiap baris:
   - Lokasi $A : 0.5 + 0.7 = 1.2$
   - Lokasi $B : 0.6 + 0.8 = 1.4$
   - Lokasi $C : 0.4 + 0.9 = 1.3$
2. Untuk menemukan **lokasi dengan komposisi tertinggi**, kita bandingkan jumlah total setiap lokasi:
   - Lokasi $A : 1.2$
   - Lokasi $B : 1.4$ (tertinggi)
   - Lokasi $C : 1.3$

   Jadi, lokasi dengan total komposisi tertinggi adalah **Lokasi B**.
3. Untuk menghitung **rata-rata komposisi mineral**, kita ambil rata-rata dari setiap kolom:
   - Komposisi 1:
   $$\frac{0.5 + 0.6 + 0.4}{3} = \frac{1.5}{3} = 0.5$$

- Komposisi 2:
$$\frac{0.7 + 0.8 + 0.9}{3} = \frac{2.4}{3} = 0.8$$

  Rata-rata komposisi mineral untuk Komposisi 1 adalah **0.5** dan untuk Komposisi 2 adalah **0.8**.

Dengan menggunakan matriks di atas, kita dapat menganalisis data geologi secara efisien dan membuat kesimpulan yang dapat membantu perencanaan proyek pertambangan.

3.4.2 Transformasi Koordinat

Seorang insinyur pertambangan sedang bekerja di tambang bawah tanah dan ingin memodelkan pergerakan sebuah alat berat yang bergerak di sepanjang terowongan. Alat berat tersebut awalnya berada pada posisi vektor:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Namun, karena medan tambang yang tidak rata, alat ini mengalami transformasi koordinat. Pergerakan alat tersebut dimodelkan dengan menggunakan matriks transformasi T, yang merepresentasikan perubahan koordinat sesuai dengan faktor berikut:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Faktor ini menunjukkan bahwa pergerakan alat berat di sepanjang sumbu X dilipatgandakan 2 kali, di sepanjang sumbu Y dilipatgandakan 3 kali, dan di sepanjang sumbu Z dilipatgandakan 4 kali.

Pertanyaannya, tentukan posisi baru alat berat tersebut setelah mengalami transformasi ini. Visualisasikan pergerakan alat berat tersebut dari koordinat awal hingga koordinat akhir.

Diketahui:

Vektor posisi awal alat berat:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriks transformasi T:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Dengan menghitung transformasi v', posisi baru alat berat menjadi:

$$v' = T \cdot v = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Artinya, alat berat kini berada di koordinat $v' = (2, 6, 4)$, setelah transformasi. Berikut adalah visualisasi dari perubahan posisi alat berat tersebut.

Berikut ini diperlihatkan visualiasai vektor v yang mengalami transformasi menjadi vektor v' dengan perubahan koordinat sesuai dengan matriks transformasi yang diterapkan. Vektor v' memiliki koordinat yang lebih besar karena elemen-elemen matriks T memperbesar nilai x, y, dan z masing-masing sesuai dengan faktor yang ada pada diagonal matriks transformasi tersebut.

Visualisasi Transformasi Koordinat

Chapter 4

Sistem Persamaan Linear

Sistem Persamaan Linear (SPL) adalah kumpulan dua atau lebih persamaan linear yang memiliki variabel yang sama. Tujuan dari SPL adalah untuk mencari nilai-nilai variabel yang memenuhi semua persamaan dalam sistem tersebut.

4.1 Bentuk Umum SPL

Bentuk umum dari persamaan linear adalah:

$$ax + by + c = 0$$

atau,

$$ax + by = c$$

di mana:

- a, b, dan c adalah konstanta.
- x dan y adalah variabel.

4.2 SPL Dua Variabel

Bentuk Umum SPL dua variabel adalah sebagai berikut:

1. $a_1x + b_1y = c_2$
2. $a_2x + b_2y = c_2$

SPL dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

4.2.1 Kasus 1: Kebutuhan Mineral

Misalkan kita memiliki dua tambang yang memproduksi dua jenis mineral: Mineral A dan Mineral B.

1. **Tambang 1** memproduksi 30 ton Mineral A dan 20 ton Mineral B per bulan.
2. **Tambang 2** memproduksi 50 ton Mineral A dan 30 ton Mineral B per bulan.

Jika perusahaan ingin memenuhi permintaan pasar yang membutuhkan total 450 ton Mineral A dan 290 ton Mineral B per bulan, kita dapat menggunakan sistem persamaan linear (SPL) untuk menentukan berapa banyak bulan masing-masing tambang harus beroperasi.

Misalkan x adalah jumlah bulan Tambang 1 beroperasi, dan y adalah jumlah bulan Tambang 2 beroperasi. Sistem Persamaannya adalah:

1. $$30x + 50y = 450$$
   (untuk Mineral A)
2. $$20x + 30y = 290$$
   (untuk Mineral B)

4.2.2 Metode Penyelesaian

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, antara lain:

1. Substitusi

Metode substitusi melibatkan penyelesaian satu persamaan untuk satu variabel, lalu substitusi nilai tersebut ke dalam persamaan lainnya.

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Isolasi x dalam Persamaan (1):

$$30x = 450 - 50y$$
$$x = \frac{450 - 50y}{30}$$
$$x = 15 - \frac{5y}{3}$$

2. Substitusi x ke dalam Persamaan (2):

$$20\left(15 - \frac{5y}{3}\right) + 30y = 290$$
$$300 - \frac{100y}{3} + 30y = 290$$

3. Sederhanakan persamaan:

$$300 + \frac{-100y + 90y}{3} = 290$$
$$300 - \frac{10y}{3} = 290$$

4. Selesaikan untuk y:

$$\frac{-10y}{3} = -10$$
$$y = 3$$

5. Substitusi $y = 3$ ke dalam Persamaan untuk x:

$$x = 15 - \frac{5(3)}{3}$$
$$x = 15 - 5 = 10$$

Jadi, solusi dari sistem persamaan ini adalah:

$$x = 10, \quad y = 3$$

2. Eliminasi

Metode eliminasi melibatkan penjumlahan atau pengurangan persamaan untuk mengeliminasi satu variabel.

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Kalikan Persamaan (1) dengan 2 dan Persamaan (2) dengan 3 untuk menyamakan koefisien x:

$$2(30x + 50y) = 2 \times 450$$
$$60x + 100y = 900$$

$$3(20x + 30y) = 3 \times 290$$
$$60x + 90y = 870$$

2. Kurangkan Persamaan (2) yang sudah dikalikan dari Persamaan (1) yang sudah dikalikan untuk mengeliminasi x:

$$(60x + 100y) - (60x + 90y) = 900 - 870$$
$$10y = 30$$
$$y = 3$$

3. Substitusi nilai $y = 3$ ke dalam salah satu persamaan asli, misalnya Persamaan (1):

$$30x + 50(3) = 450$$
$$30x + 150 = 450$$
$$30x = 300$$
$$x = 10$$

Jadi, solusi dari sistem persamaan ini adalah:

$$x = 10, \quad y = 3$$

3. Metode Grafik

Metode grafik melibatkan pemetakan setiap persamaan pada grafik dan menemukan titik potongnya. Titik potong tersebut adalah solusi dari sistem persamaan.

Langkah-langkah Penyelesaian

1. Tentukan Titik pada Persamaan (1):

   Persamaan (1): $30x + 50y = 450$

   - Ketika $x = 0$:

   $$30(0) + 50y = 450 \Rightarrow 50y = 450 \Rightarrow y = 9 \quad (0, 9)$$

   - Ketika $y = 0$:

   $$30x + 50(0) = 450 \Rightarrow 30x = 450 \Rightarrow x = 15 \quad (15, 0)$$

   Titik-titik pada garis pertama adalah $(0, 9)$ dan $(15, 0)$.

2. Tentukan Titik pada Persamaan (2):

   Persamaan (2): $20x + 30y = 290$

   - Ketika $x = 0$:

   $$20(0) + 30y = 290 \Rightarrow 30y = 290 \Rightarrow y = \frac{290}{30} \approx 9.67 \quad \left(0, \frac{290}{30}\right)$$

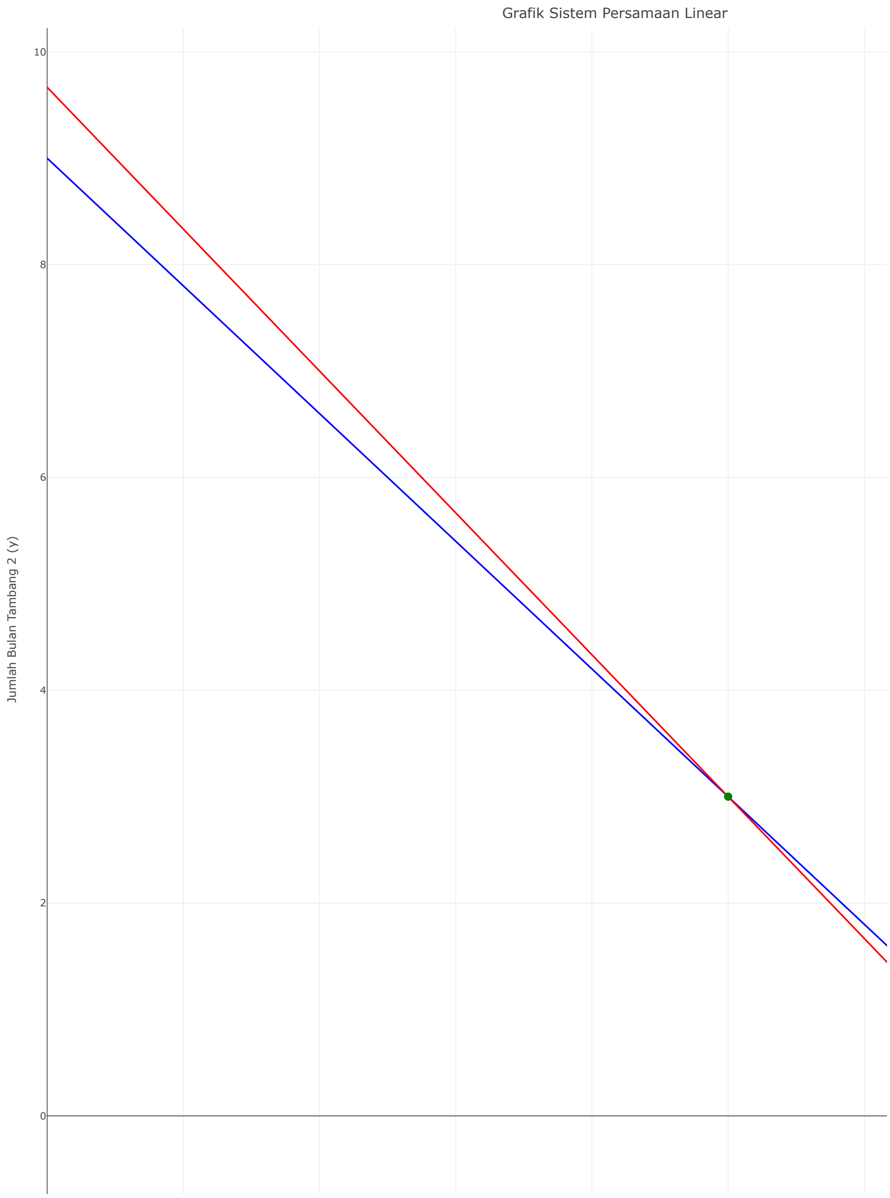
   - Ketika $y = 0$:

   $$20x + 30(0) = 290 \Rightarrow 20x = 290 \Rightarrow x = \frac{290}{20} = 14.5 \quad \left(\frac{290}{20}, 0\right)$$

   Titik-titik pada garis kedua adalah $\left(0, \frac{290}{30}\right)$ dan $\left(\frac{290}{20}, 0\right)$.

3. Gambarkan Kedua Garis:

Dengan memperhatikan kedua garis pada koordinat kartesius, ditemukan bahwa kedua garis berpotongan di titik $(10, 3)$.



Sehingga dapat disimpulkan, solusi dari sistem persamaan ini adalah:

$$x = 10, \quad y = 3$$

Artinya, Tambang 1 harus beroperasi selama 10 bulan, dan Tambang 2 harus beroperasi selama 3 bulan untuk memenuhi kebutuhan pasar sebanyak 450 ton Mineral A dan 290 ton Mineral B per bulan.

4.3 SPL Tiga Variabel

Bentuk umum dari sistem persamaan linear tiga variabel dapat dinyatakan sebagai:

1. $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
2. $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$
3. $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

SPL tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Keterangan:

- x, y, dan z adalah variabel yang tidak diketahui.
- $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3)$ adalah koefisien dan konstanta dari persamaan yang dapat berupa bilangan real.
- Matriks di sebelah kiri mengandung koefisien dari variabel, sedangkan matriks di sebelah kanan mengandung konstanta.

4.3.1 Kasus 2: Kebutuhan Batubara

Misalkan kita memiliki tiga tambang yang memproduksi tiga jenis batubara: Batubara **X**, Batubara **Y**, dan Batubara **Z**.

- **Tambang 1** memproduksi 20 ton Batubara **X**, 30 ton Batubara **Y**, dan 10 ton Batubara **Z** per bulan.
- **Tambang 2** memproduksi 40 ton Batubara **X**, 20 ton Batubara **Y**, dan 30 ton Batubara **Z** per bulan.
- **Tambang 3** memproduksi 30 ton Batubara **X**, 40 ton Batubara **Y**, dan 20 ton Batubara **Z** per bulan.

Perusahaan ingin memenuhi permintaan pasar yang membutuhkan total 800 ton Batubara **X**, 600 ton Batubara **Y**, dan 400 ton Batubara **Z** per bulan. Kita dapat menggunakan sistem persamaan linear (SPL) untuk menentukan berapa banyak bulan masing-masing tambang harus beroperasi.

Misalkan:

- x adalah jumlah bulan Tambang 1 beroperasi,
- y adalah jumlah bulan Tambang 2 beroperasi,

- z adalah jumlah bulan Tambang 3 beroperasi.

Sistem persamaannya adalah:

$$\begin{aligned} 20x + 40y + 30z &= 800 \quad \text{(untuk Batubara X)} \\ 30x + 20y + 40z &= 600 \quad \text{(untuk Batubara Y)} \\ 10x + 30y + 20z &= 400 \quad \text{(untuk Batubara Z)} \end{aligned}$$

Berapa bulan masing-masing tambang (x, y, z) harus beroperasi untuk memenuhi permintaan pasar?

4.3.2 Metode Invers Matriks

Sama halnya dengan SPL dua variabel, kasus ini dapat diselesaikan dengan Metode Substitusi, Metode Eliminasi, dan Metode Grafik. Tetapi prosesnya membutuhkan langkah yang terlalu panjang dan rumit, kasus ini sebaiknya diselesaikan dengan Metode Invers Matriks.

Langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan di atas dengan metode invers matriks adalah sebagai berikut:

Tulis Bentuk Matriks

Menyusun Matriks

Dari sistem persamaan, kita dapat menyusun matriks sebagai berikut:

- Matriks Koefisien (A):
$$A = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 30 \\ 30 & 20 & 40 \\ 10 & 30 & 20 \end{bmatrix}$$

- Matriks Variabel (X):
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Matriks Konstanta (B):
$$B = \begin{bmatrix} 800 \\ 600 \\ 400 \end{bmatrix}$$

Sehingga kita dapat menulis sistem persamaan dalam bentuk matriks sebagai:

$$AX = B$$

Penyelesaian Invers Matriks A

Untuk menyelesaikan X, kita perlu menghitung invers dari matriks A:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

Jika kita dapat menghitung invers A^{-1}, kita dapat memperoleh:

$$X = A^{-1}B$$

Hitung Invers Matriks A

Langkah-langkah Perhitungan adalah sebagai berikut:

1. Menghitung Determinan Matriks A

   Determinan A dihitung dengan ekspansi kofaktor sebagai berikut:

   $$\det(A) = 20(20 \cdot 20 - 10 \cdot 30) - 40(30 \cdot 20 - 10 \cdot 40) + 30(30 \cdot 10 - 10 \cdot 20)$$

   Dengan menghitung setiap bagian:

   - $20 \cdot (400 - 300) = 2000$
   - $-40 \cdot (600 - 400) = -8000$
   - $30 \cdot (300 - 200) = 3000$

   Sehingga,

   $$\det(A) = 2000 - 8000 + 3000 = -48000$$

2. Menghitung Matriks Kofaktor dan Adjoin Matriks A

   Setelah menghitung kofaktor untuk setiap elemen, kita memperoleh:

   $$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2000 & 1000 & 1000 \\ 3000 & -4000 & 1000 \\ 1000 & 2000 & -600 \end{bmatrix}$$

3. Menghitung Invers Matriks A

   Invers matriks A adalah:

   $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

   Dengan $\det(A) = -48000$, maka:

   $$A^{-1} = \frac{1}{-48000} \cdot \begin{bmatrix} -2000 & 1000 & 1000 \\ 3000 & -4000 & 1000 \\ 1000 & 2000 & -600 \end{bmatrix}$$

atau disederhanakan menjadi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & -\frac{1}{48} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{16} & \frac{5}{48} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{48} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{80} \end{bmatrix}$$

4. Menghitung Nilai x, y, dan z

   Untuk mendapatkan nilai $X = A^{-1} \cdot B$:

   - Untuk x:

   $$x = \frac{1}{24} \cdot 800 - \frac{1}{48} \cdot 600 - \frac{1}{48} \cdot 400 = 10$$

   - Untuk y:

   $$y = -\frac{1}{16} \cdot 800 + \frac{5}{48} \cdot 600 - \frac{1}{48} \cdot 400 = 5$$

   - Untuk z:

   $$z = -\frac{1}{48} \cdot 800 - \frac{1}{24} \cdot 600 + \frac{1}{80} \cdot 400 = 4$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

- **Jumlah bulan Tambang 1 beroperasi** ((x)) = 10 bulan
- **Jumlah bulan Tambang 2 beroperasi** ((y)) = 5 bulan
- **Jumlah bulan Tambang 3 beroperasi** ((z)) = 4 bulan

Visualisasi Kasus 2

Berikut diperlihatkan visualisasi ketiga persamaanya tersebut:

Visualisasi 3D Sistem Persamaan Batubara

Chapter 5

Ruang Vektor dan Basis

Dalam dunia teknik, terutama dalam bidang pertambangan, analisis dan pengolahan data menjadi semakin penting seiring dengan perkembangan teknologi. Pertambangan modern tidak hanya bergantung pada pengalaman dan keterampilan praktis, tetapi juga pada pemodelan matematis dan analisis data untuk meningkatkan efisiensi dan efektivitas operasi.

5.1 Ruang Vektor 2D

Ruang vektor 2D memiliki beberapa sifat penting yang harus dipenuhi agar suatu himpunan vektor dan operasi pada himpunan tersebut dapat disebut sebagai ruang vektor. Sifat-sifat utama ruang vektor meliputi:

1. **Arah**: Menunjukkan ke mana panah itu mengarah.
2. **Panjang**: Menunjukkan seberapa jauh panah itu menjangkau.

Misalkan kita memiliki dua vektor dalam dua dimensi:

- Vektor $\mathbf{A} = (2, 3)$
- Vektor $\mathbf{B} = (4, 1)$

Vektor A dapat digambarkan sebagai panah yang mengarah ke titik (2, 3) di bidang, dan Vektor B mengarah ke titik (4, 1). Dalam ruang vektor, kita dapat melakukan dua operasi dasar: **penjumlahan** dan **perkalian dengan angka (skalar)**.

5.1.1 Penjumlahan Vektor

Ketika kita menjumlahkan dua vektor, kita menggabungkan kedua panah tersebut. Misalnya, untuk menjumlahkan vektor A dan vektor B :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (2, 3) + (4, 1) = (2 + 4, 3 + 1) = (6, 4)$$

Hasilnya, vektor $\mathbf{C} = (6, 4)$ adalah panah yang mengarah ke titik (6, 4) di bidang. Ini berarti kita bisa membayangkan bahwa kita menggerakkan panah A ke ujung panah B untuk mendapatkan panah C.

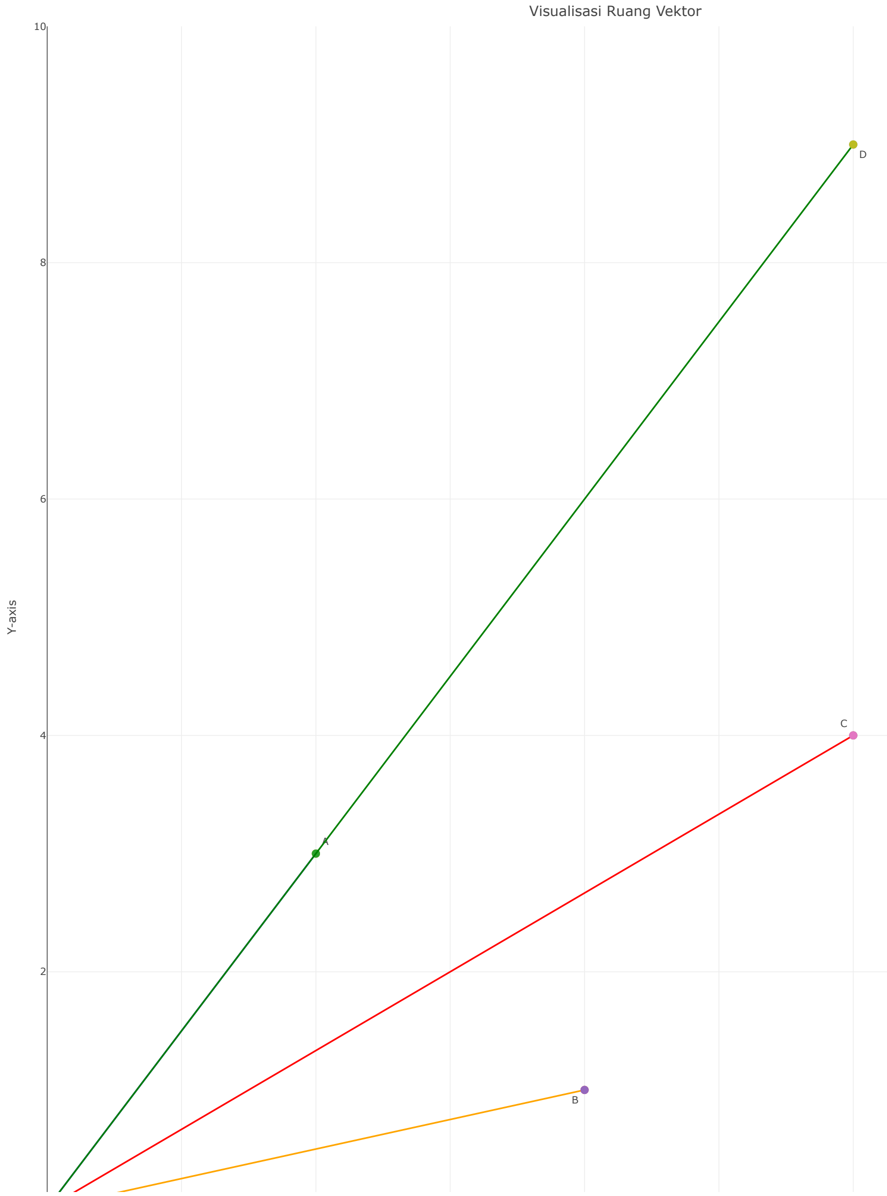
5.1.2 Perkalian dengan Angka (Skalar)

Sekarang, mari kita coba mengalikan vektor A dengan angka, misalnya 3:

$$\mathbf{D} = 3 \cdot \mathbf{A} = 3 \cdot (2, 3) = (3 \cdot 2, 3 \cdot 3) = (6, 9)$$

Hasilnya, vektor $\mathbf{D} = (6, 9)$ adalah panah yang panjangnya tiga kali lipat dari vektor A, tetapi arahnya tetap sama. Jika vektor A mengarah ke titik (2, 3), vektor D sekarang mengarah ke titik (6, 9).

5.1.3 Visualisasi Ruang Vektor



5.2 Ruang Vektor 3D

Ruang vektor 3D adalah perpanjangan dari ruang vektor 2D yang melibatkan satu dimensi tambahan. Di ruang 3D, vektor memiliki tiga komponen yang menunjukkan arah dan panjang dalam tiga sumbu (x, y, z). Vektor di ruang 3D bisa diwakili sebagai titik yang memiliki koordinat (x, y, z), dan operasi penjumlahan serta perkalian dengan skalar tetap dapat diterapkan.

Misalkan kita memiliki dua vektor dalam tiga dimensi:

- Vektor $\mathbf{A} = (2, 3, 1)$
- Vektor $\mathbf{B} = (4, 1, 5)$

Vektor **A** dapat digambarkan sebagai panah yang mengarah ke titik $(2, 3, 1)$ di ruang 3D, dan vektor **B** mengarah ke titik $(4, 1, 5)$. Dalam ruang vektor 3D, kita dapat melakukan dua operasi dasar: **penjumlahan** dan **perkalian dengan angka (skalar)**, sama seperti pada ruang 2D.

5.2.1 Penjumlahan Vektor 3D

Ketika kita menjumlahkan dua vektor, kita menggabungkan komponen-komponen mereka secara individual. Misalnya, untuk menjumlahkan vektor A dan vektor B:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (2, 3, 1) + (4, 1, 5) = (2 + 4, 3 + 1, 1 + 5) = (6, 4, 6)$$

Hasilnya, vektor $\mathbf{C} = (6, 4, 6)$ adalah panah yang mengarah ke titik $(6, 4, 6)$ di ruang 3D. Sama seperti dalam 2D, kita bisa membayangkan bahwa kita menggerakkan panah A ke ujung panah B untuk mendapatkan panah C.

5.2.2 Perkalian dengan Angka (Skalar)

Sekarang, mari kita coba mengalikan vektor A dengan angka (skalar), misalnya 3:

$$\mathbf{D} = 3 \cdot \mathbf{A} = 3 \cdot (2, 3, 1) = (3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 1) = (6, 9, 3)$$

Hasilnya, vektor $\mathbf{D} = (6, 9, 3)$ adalah panah yang panjangnya tiga kali lipat dari vektor A, tetapi arahnya tetap sama. Jika vektor A mengarah ke titik $(2, 3, 1)$, maka vektor D mengarah ke titik $(6, 9, 3)$ di ruang 3D.

5.2.3 Visualisasi Ruang Vektor 3D

Visualisasi Ruang Vektor 3D

5.3 Sifat Ruang Vektor

1. Eksistensi Elemen Nol (Vektor Nol)

Ruang vektor 2D memiliki vektor nol $\vec{0} = (0, 0)$, yang jika dijumlahkan dengan vektor mana pun $\vec{v}$, hasilnya tetap $\vec{v}$.

Contoh: Untuk vektor $\vec{u} = (3, 4)$, maka $\vec{u} + \vec{0} = (3 + 0, 4 + 0) = (3, 4)$.

2. Eksistensi Invers Penjumlahan (Vektor Negatif)

Untuk setiap vektor $\vec{v}$ dalam ruang 2D, ada vektor invers $-\vec{v}$ sedemikian rupa sehingga $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.

Contoh: Jika $\vec{v} = (2, 5)$, maka inversnya adalah $-\vec{v} = (-2, -5)$, sehingga $\vec{v} + (-\vec{v}) = (2 - 2, 5 - 5) = (0, 0)$.

3. Asosiatif pada Penjumlahan

Penjumlahan dalam ruang vektor bersifat asosiatif, yang berarti bahwa untuk setiap tiga vektor $\vec{u}, \vec{v}$, dan $\vec{w}$, berlaku:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

4. Komutatif pada Penjumlahan

Penjumlahan vektor bersifat komutatif, yang berarti bahwa untuk setiap dua vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, berlaku:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

5. **Distribusi Skalar terhadap Penjumlahan Vektor**
   Untuk setiap skalar c dan dua vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, berlaku:

   $$c \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (c \cdot \vec{u}) + (c \cdot \vec{v})$$

6. **Distribusi Skalar terhadap Penjumlahan Skalar**
   Untuk setiap dua skalar a dan b, dan satu vektor $\vec{v}$, berlaku:

   $$(a + b) \cdot \vec{v} = (a \cdot \vec{v}) + (b \cdot \vec{v})$$

7. **Asosiatif pada Perkalian Skalar**
   Untuk setiap dua skalar a dan b, dan satu vektor $\vec{v}$, berlaku:

   $$a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$$

8. Identitas Perkalian Skalar

Untuk setiap vektor $\vec{v}$, perkalian skalar dengan 1 tidak mengubah vektor tersebut:

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

5.4 Mengapa Ruang Vektor Penting?

1. **Analisis Data**: Teknik pertambangan seringkali melibatkan pengumpulan data dalam jumlah besar. Vektor dapat digunakan untuk merepresentasikan data geologis, hasil eksplorasi, dan parameter lainnya dalam bentuk yang lebih terstruktur.

2. **Pemodelan Geospasial**: Ruang vektor memungkinkan insinyur dan geolog untuk memodelkan bentuk dan distribusi mineral, kontur tanah, dan fitur geologis lainnya. Dengan menggunakan vektor, kita dapat memvisualisasikan dan menganalisis geometri kompleks.

3. **Optimasi Proses**: Dalam pengambilan keputusan mengenai lokasi pengeboran atau rencana penambangan, ruang vektor membantu dalam optimasi dan simulasi berbagai skenario berdasarkan parameter yang berbeda.

4. **Pengolahan Citra**: Di era digital, pengolahan citra satelit atau UAV (drone) untuk survei tanah dan eksplorasi mineral menjadi semakin penting. Vektor digunakan untuk merepresentasikan informasi piksel dalam citra dan untuk analisis spasial.

5.5 Penerapan Ruang Vektor

5.5.1 Representasi Geometri dalam Geologi

Dalam geologi, vektor sering digunakan untuk merepresentasikan koordinat titik di ruang tiga dimensi. Misalnya, saat mengambil sampel batuan di lapangan, titik-titik pengambilan sampel dapat direpresentasikan sebagai vektor di ruang 3D, dengan setiap koordinat (x, y, z) menggambarkan posisi geografis dari sampel tersebut.

Contoh Kasus

Misalkan kita ingin memetakan beberapa titik pengambilan sampel di suatu peta geologis. Setiap titik memiliki koordinat yang menunjukkan lokasi pengambilan sampel:

- Titik $\mathbf{A} = (3, 4, 2)$
- Titik $\mathbf{B} = (5, 1, 7)$
- Titik $\mathbf{C} = (2, 8, 4)$

Setiap titik ini dapat dianggap sebagai vektor yang merepresentasikan lokasi sampel batuan di ruang tiga dimensi.

Visualisasi Titik Pengambilan Sampel

Kita bisa memvisualisasikan titik-titik pengambilan sampel ini di ruang 3D.

Visualisasi Titik Pengambilan Sampel Batuan

5.5.1.1 Menghitung Jarak

Vektor dapat digunakan untuk merepresentasikan titik-titik pengambilan sampel di ruang tiga dimensi. Dalam kasus ini, kita akan menghitung jarak antara tiga titik yang diberikan:

- Titik A $= (3, 4, 2)$

- Titik B = $(5, 1, 7)$
- Titik C = $(2, 8, 4)$

Rumus untuk menghitung jarak antara dua titik di ruang 3D adalah:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

1. Menghitung Jarak antara Titik A dan Titik B

Diketahui:

- Titik A = $(3, 4, 2)$
- Titik B = $(5, 1, 7)$

Menggunakan rumus jarak:

$$d_{AB} = \sqrt{(5-3)^2 + (1-4)^2 + (7-2)^2}$$

Langkah-langkah perhitungan:

$$d_{AB} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (5)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{4 + 9 + 25}$$

$$d_{AB} = \sqrt{38}$$

$$d_{AB} \approx 6.16 \text{ satuan}$$

Jadi, jarak antara titik A dan B adalah sekitar **6.16 satuan**.

2. Menghitung Jarak antara Titik A dan Titik C

Diketahui:

- Titik A = $(3, 4, 2)$
- Titik C = $(2, 8, 4)$

Menggunakan rumus jarak:

$$d_{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (8-4)^2 + (4-2)^2}$$

Langkah-langkah perhitungan:

$$d_{AC} = \sqrt{(-1)^2 + (4)^2 + (2)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{1 + 16 + 4}$$

$$d_{AC} = \sqrt{21}$$

$$d_{AC} \approx 4.58 \text{ satuan}$$

Jadi, jarak antara titik A dan C adalah sekitar **4.58 satuan**.

3. Menghitung Jarak antara Titik B dan Titik C

Diketahui:

- Titik B $= (5, 1, 7)$
- Titik C $= (2, 8, 4)$

Menggunakan rumus jarak:

$$d_{BC} = \sqrt{(2-5)^2 + (8-1)^2 + (4-7)^2}$$

Langkah-langkah perhitungan:

$$d_{BC} = \sqrt{(-3)^2 + (7)^2 + (-3)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{9 + 49 + 9}$$

$$d_{BC} = \sqrt{67}$$

$$d_{BC} \approx 8.19 \text{ satuan}$$

Jadi, jarak antara titik B dan C adalah sekitar **8.19 satuan**.

Kesimpulan:

Jarak antara titik-titik yang telah dihitung:

- Jarak antara titik A dan B: $d_{AB} \approx 6.16$
- Jarak antara titik A dan C: $d_{AC} \approx 4.58$
- Jarak antara titik B dan C: $d_{BC} \approx 8.19$

Titik-titik ini dapat digunakan untuk representasi geometri, seperti pengambilan sampel di suatu area tambang dalam geologi.

5.5.2 Analisis Kualitas Mineral

Data kualitas mineral dapat dianalisis dengan representasi vektor untuk menentukan konsentrasi mineral dalam sampel tanah. Setiap sampel dapat direpresentasikan sebagai vektor, dan analisis dapat dilakukan untuk mengevaluasi potensi area penambangan.

Dalam geologi, data kualitas mineral dapat direpresentasikan sebagai vektor, di mana setiap elemen dari vektor mewakili konsentrasi mineral dalam suatu sampel tanah. Dengan menganalisis vektor-vektor ini, kita dapat mengevaluasi potensi area penambangan.

Misalkan kita memiliki dua sampel tanah dengan komposisi mineral sebagai berikut:

- Sampel 1 $= (10, 5, 8)$
- Sampel 2 $= (7, 9, 6)$

Setiap elemen dari vektor tersebut mewakili konsentrasi mineral dalam satuan tertentu (misalnya, persen atau gram per kilogram). Tiga elemen dalam setiap vektor mewakili tiga jenis mineral utama yang kita analisis.

Penjumlahan Vektor

Untuk mendapatkan kombinasi konsentrasi mineral dari kedua sampel, kita dapat menjumlahkan kedua vektor:

$$\mathbf{C} = \mathbf{S_1} + \mathbf{S_2}$$

Dengan melakukan penjumlahan, kita mendapatkan:

$$\mathbf{C} = (10, 5, 8) + (7, 9, 6) = (10 + 7, 5 + 9, 8 + 6)$$

Langkah-langkah perhitungan:

$$\mathbf{C} = (17, 14, 14)$$

Hasil penjumlahan ini memberikan kita konsentrasi total dari ketiga mineral di area yang mengandung kedua sampel tersebut. Dengan demikian, konsentrasi gabungan dari sampel 1 dan sampel 2 untuk masing-masing mineral adalah **17, 14, dan 14**.

Perkalian Skalar

Jika kita ingin memperkirakan pengaruh faktor lingkungan yang mengurangi konsentrasi mineral pada kedua sampel tersebut hingga 60%, kita dapat menggunakan perkalian skalar untuk memodelkan pengurangan ini:

$$\mathbf{D} = 0.6 \cdot \mathbf{S_1}$$

Untuk Sampel 1:

$$\mathbf{D_1} = 0.6 \cdot (10, 5, 8)$$

Langkah-langkah perhitungan:

$$\mathbf{D_1} = (0.6 \cdot 10, 0.6 \cdot 5, 0.6 \cdot 8)$$

$$\mathbf{D_1} = (6, 3, 4.8)$$

Jadi, setelah faktor lingkungan diperhitungkan, konsentrasi mineral pada sampel 1 menjadi **6, 3, dan 4.8** untuk masing-masing mineral.

Jarak Vektor

Untuk mengukur perbedaan kualitas mineral antara kedua sampel, kita dapat menghitung jarak Euclidean antara vektor Sampel 1 dan Sampel 2:

Rumus jarak antara dua vektor di ruang 3D adalah:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Menggunakan rumus ini, kita menghitung jarak antara Sampel 1 $(10, 5, 8)$ dan Sampel 2 $(7, 9, 6)$:

$$d = \sqrt{(7 - 10)^2 + (9 - 5)^2 + (6 - 8)^2}$$

Langkah-langkah perhitungan:

$$d = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (-2)^2}$$

$$d = \sqrt{9 + 16 + 4}$$

$$d = \sqrt{29}$$

$$d \approx 5.39$$

Jadi, jarak antara kedua sampel dalam hal konsentrasi mineral adalah sekitar **5.39 satuan**. Ini menunjukkan perbedaan kualitas mineral yang cukup signifikan antara kedua sampel.

Linear Combination

Jika kita ingin mengetahui kombinasi linear dari beberapa sampel, kita dapat menggunakan operasi kombinasi linear dalam ruang vektor. Misalkan kita ingin mengetahui kualitas mineral dari kombinasi 70% Sampel 1 dan 30% Sampel 2, kita menghitungnya sebagai berikut:

$$\mathbf{L} = 0.7 \cdot \mathbf{S_1} + 0.3 \cdot \mathbf{S_2}$$

Langkah-langkah perhitungan:

$$\mathbf{L} = 0.7 \cdot (12, 8, 5) + 0.3 \cdot (9, 11, 6)$$

$$\mathbf{L} = (8.4, 5.6, 3.5) + (2.7, 3.3, 1.8)$$

$$\mathbf{L} = (8.4 + 2.7, 5.6 + 3.3, 3.5 + 1.8)$$

$$\mathbf{L} = (11.1, 8.9, 5.3)$$

Kombinasi linear ini memberikan kita estimasi kualitas mineral dari dua lokasi, dengan konsentrasi masing-masing mineral sebesar **11.1, 8.9, dan 5.3**.

Kesimpulan:

Menggunakan konsep ruang vektor, kita dapat melakukan analisis kualitas mineral yang komprehensif:

1. **Penjumlahan Vektor**: Menggabungkan konsentrasi mineral dari beberapa sampel.
2. **Perkalian Skalar**: Memodelkan pengaruh faktor eksternal yang mempengaruhi kualitas mineral.
3. **Jarak Vektor**: Mengukur perbedaan kualitas mineral antara dua sampel.
4. **Kombinasi Linear**: Menentukan kualitas mineral dari kombinasi beberapa sampel dengan proporsi tertentu.

Chapter 6

Transformasi Linear

Transformasi Linear diterapkan pada berbagai aspek, seperti pemodelan geologi, perhitungan cadangan mineral, optimasi rute penggalian, serta analisis struktur geoteknik. Dengan menguasai konsep dasar ini, mahasiswa Teknik Pertambangan diharapkan dapat mengembangkan keterampilan analitis yang diperlukan untuk menghadapi tantangan di lapangan dan melakukan perencanaan tambang yang lebih efisien dan aman.

6.1 Definisi Transformasi Linear

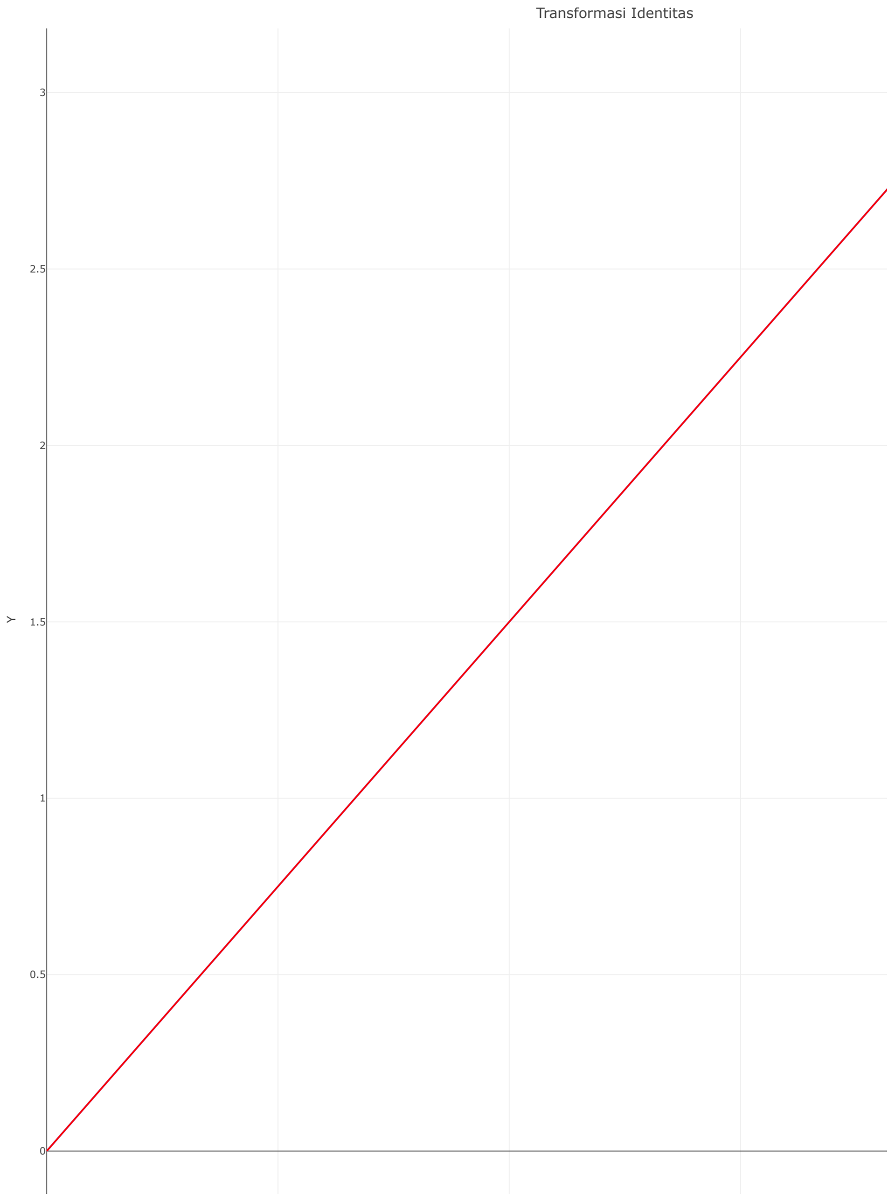
Transformasi linear adalah suatu fungsi yang memetakan vektor dari satu ruang vektor ke ruang vektor lainnya dengan cara yang mempertahankan operasi dasar dalam ruang vektor tersebut.

6.2 Transformasi Linear 2D

Transformasi linear dapat diklasifikasikan menjadi beberapa jenis berdasarkan cara mereka mempengaruhi vektor dalam ruang vektor 2D.

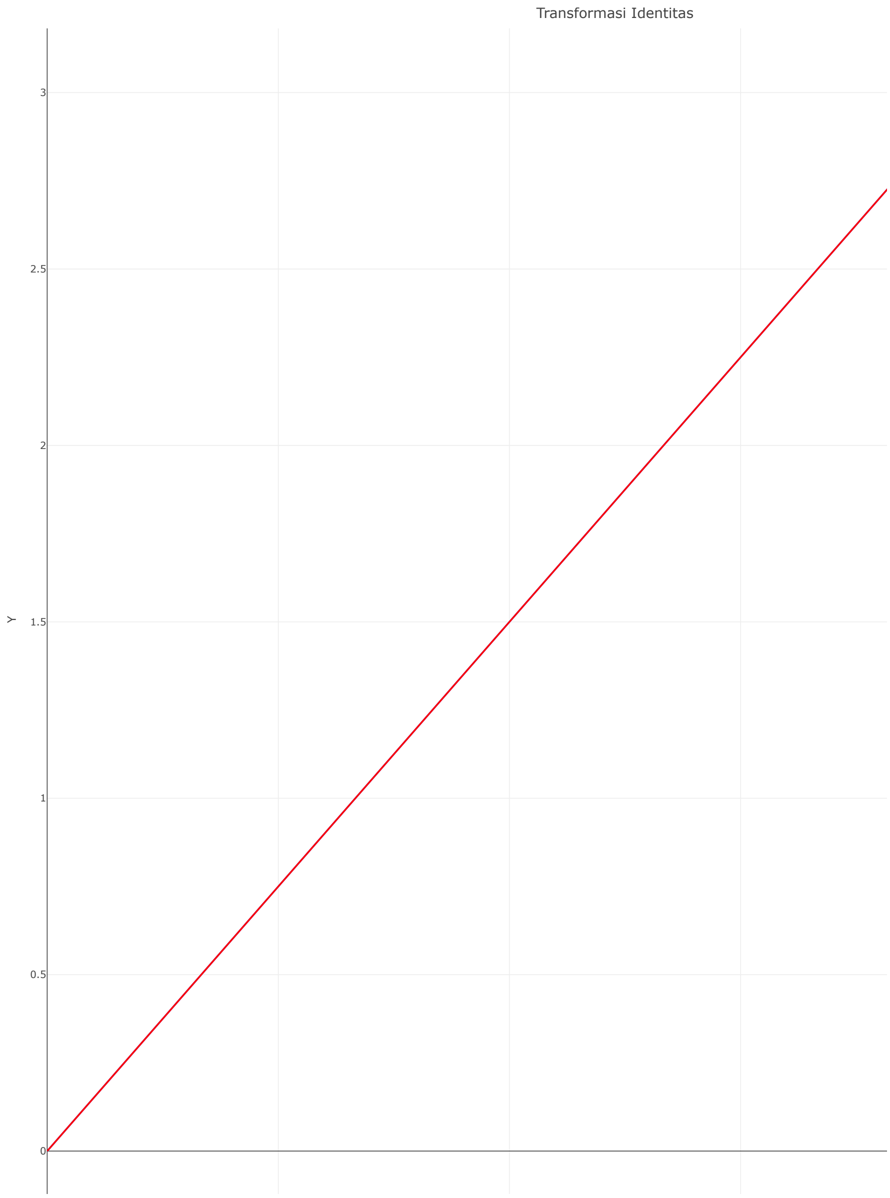
6.2.1 Transformasi Identitas 2D

Mari kita visualisasikan transformasi identitas untuk vektor $(2, 3)$.



6.2.2 Transformasi Nol 2D

Mari kita visualisasikan transformasi untuk vektor $(2, 3)$.



6.2.3 Transformasi Rotasi 2D

Rotasi adalah transformasi linear yang memutar vektor di sekitar titik asal (0, 0) dalam bidang dua dimensi. Dalam konteks ini, kita akan memutar vektor $(2, 3)$ sejauh 90 derajat.

Untuk rotasi 90 derajat, kita konversi ke radian:

$$\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}\text{radian}$$

Hitung $\cos(\theta)$ dan $\sin(\theta)$:

- $\cos(90^\circ) = 0$
- $\sin(90^\circ) = 1$

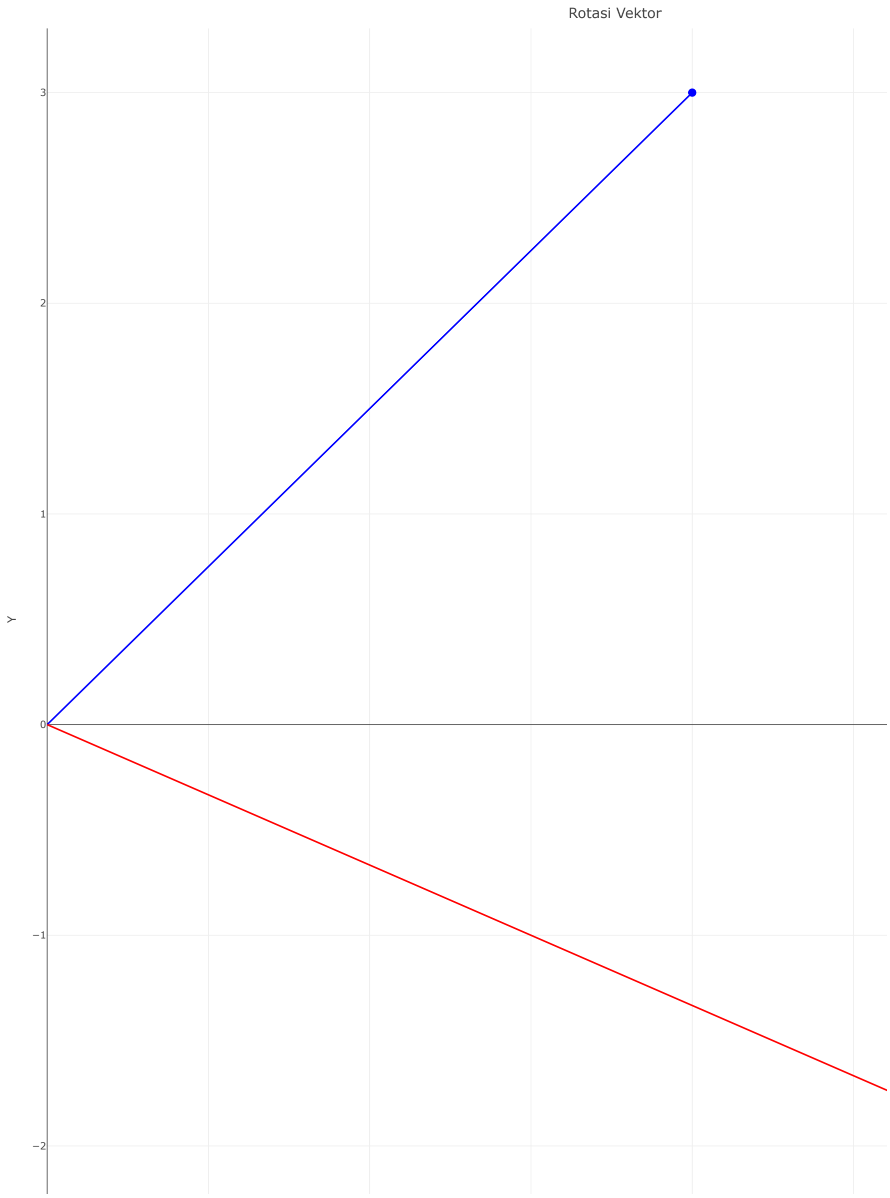
Maka, matriks rotasi untuk sudut 90 derajat menjadi:

$$R_{90} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vektor yang ingin kita rotasi adalah $(2, 3)$. Selanjutnya, kalikan matriks rotasi dengan vektor asli:

$$R_{90}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jadi, hasil rotasi vektor $(2, 3)$ sejauh 90 derajat adalah $(-3, 2)$.



6.2.4 Transformasi Refleksi 2D

Mari kita pertimbangkan vektor asli $(2, 3)$ dan kita akan menghitung refleksinya terhadap sumbu x dan sumbu y. Menghitung Hasil Refleksi:

1. **Refleksi terhadap Sumbu X**:

$$R_x(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. **Refleksi terhadap Sumbu** Y:

$$R_y(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

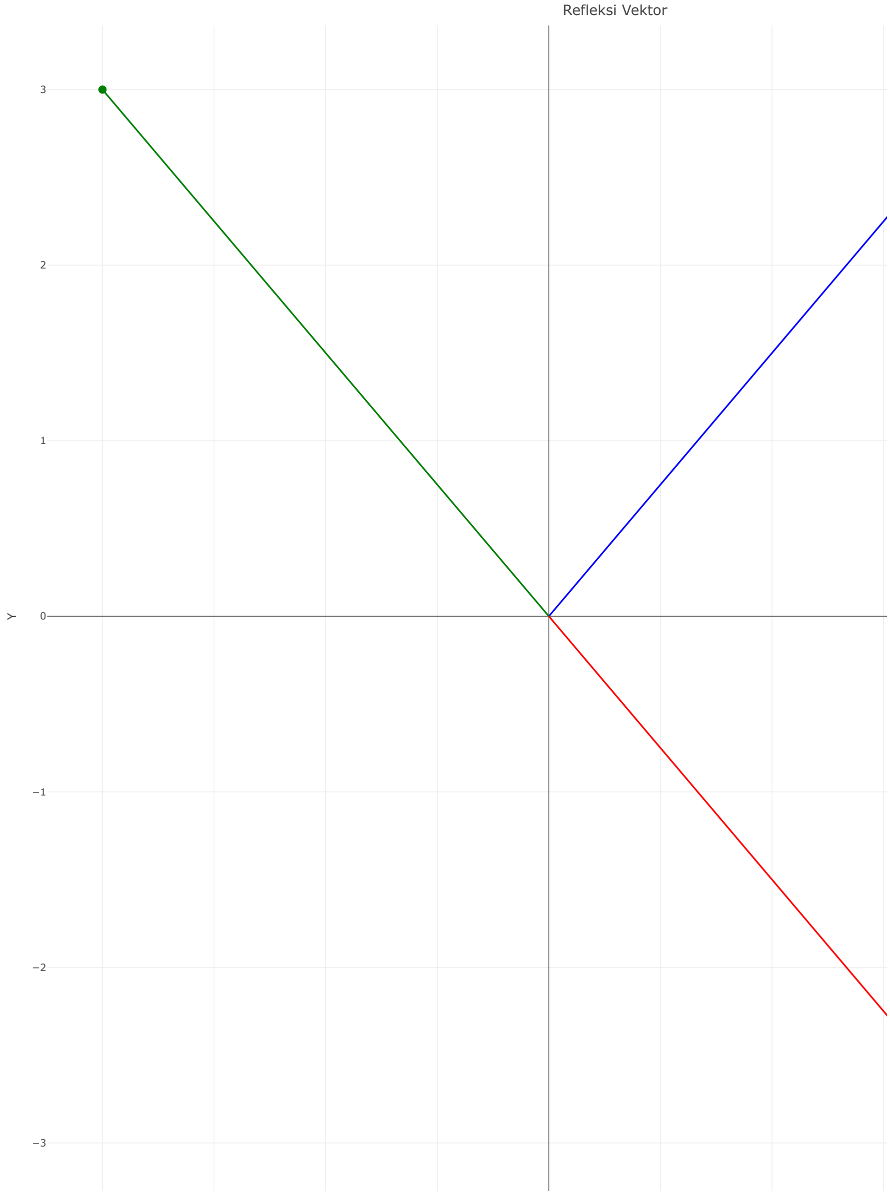
3. **Refleksi terhadap Garis** $y = x$:

$$R_{y=x}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jadi, hasil refleksi vektor $(2, 3)$ adalah:

- Refleksi terhadap sumbu x: $(2, -3)$
- Refleksi terhadap sumbu y: $(-2, 3)$
- Refleksi terhadap garis $y = x : (3, 2)$

Mari kita visualisasikan refleksi vektor $(2, 3)$ terhadap sumbu x dan sumbu y.



6.2.5 Transformasi Penskalaan 2D

Pertimbangkan vektor asli $(2, 3)$ dan kita akan skalakan vektor ini dengan beberapa faktor skalar $k = 2$ dan $k = 0.5$ untuk melihat efek penskalaan.

1. **Penskalaan dengan Faktor** $k = 2$:

$$S_2(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

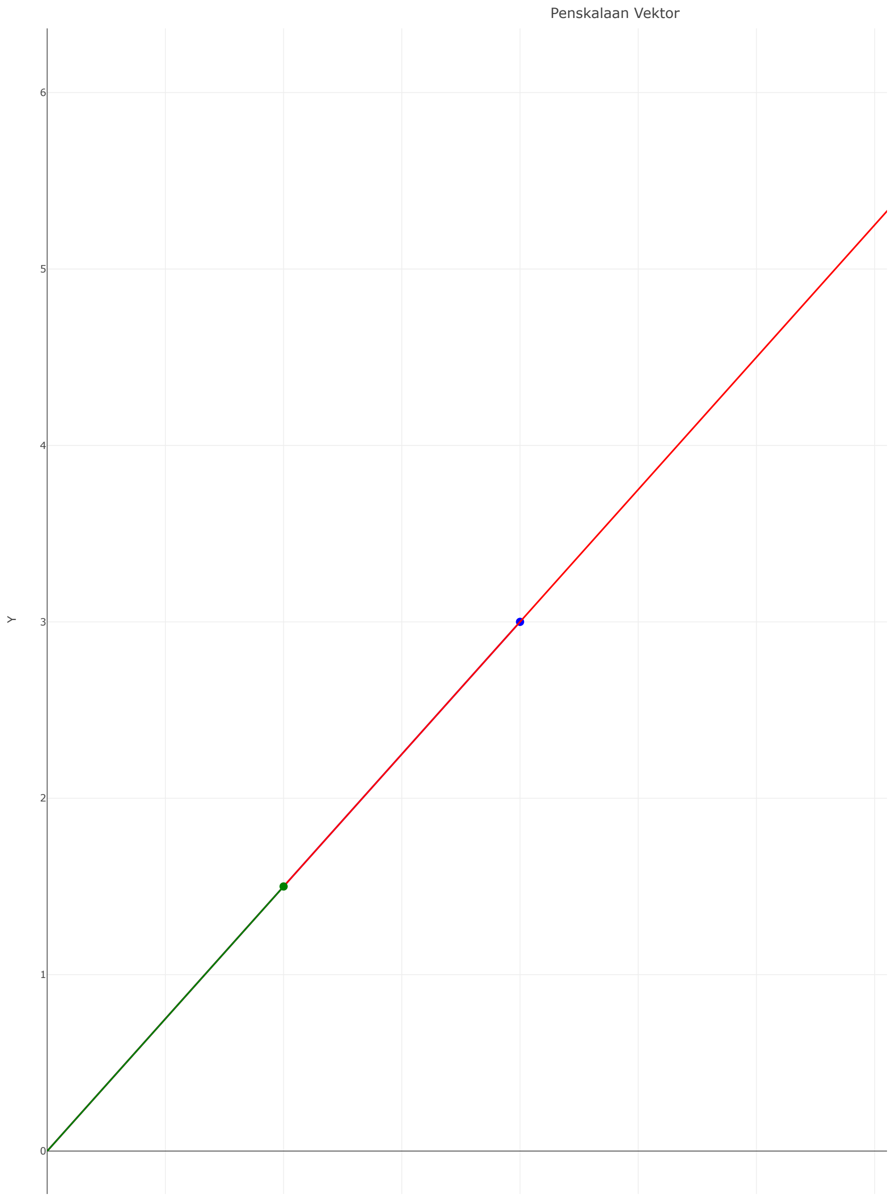
2. **Penskalaan dengan Faktor** $k = 0.5$:

$$S_{0.5}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 2 \\ 0.5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Jadi, hasil penskalaan vektor $(2, 3)$ adalah:

- Dengan faktor $k = 2 : (4, 6)$
- Dengan faktor $k = 0.5 : (1, 1.5)$

Mari kita visualisasikan vektor asli $(2, 3)$ dan hasil penskalaan dengan faktor $k = 2$ dan $k = 0.5$.



6.2.6 Transformasi Penyerapan 2D

Pertimbangkan vektor asli $(2, 3)$, dan kita akan melakukan shearing horizontal dengan faktor $k_x = 1.5$ dan shearing vertikal dengan faktor $k_y = 0.5$. Menghitung Hasil Shearing, sebagai berikut;

1. **Shearing Horizontal dengan Faktor** $k_x = 1.5$:

$$S_h(2,3) = \begin{pmatrix} 2 + 1.5 \cdot 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

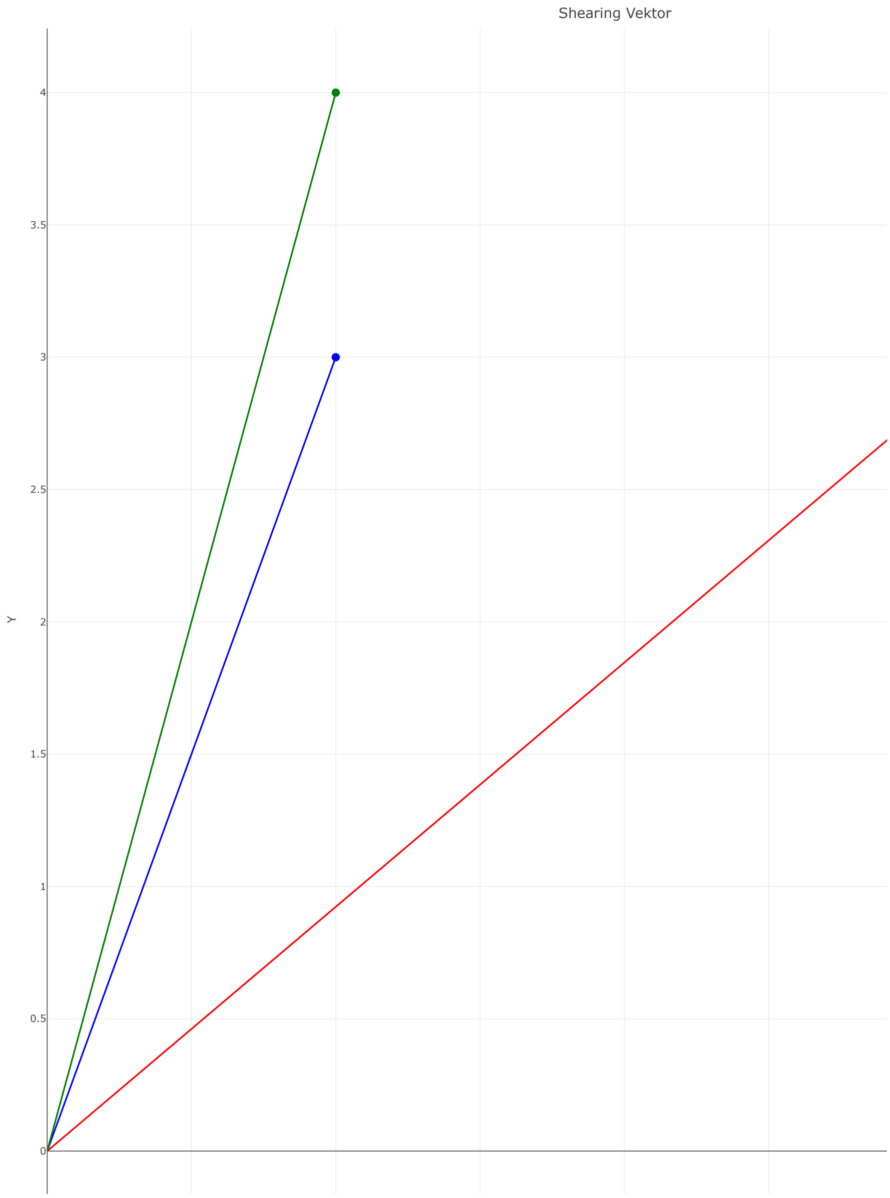
2. **Shearing Vertikal dengan Faktor** $k_y = 0.5$:

$$S_v(2,3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 + 0.5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jadi, hasil shearing vektor $(2,3)$ adalah:

- **Shearing horizontal** dengan faktor $k_x = 1.5 : (6.5, 3)$
- **Shearing vertikal** dengan faktor $k_y = 0.5 : (2, 4)$

Mari kita visualisasikan vektor asli $(2,3)$ dan hasil shearing dengan faktor $k_x = 1.5$ untuk horizontal dan $k_y = 0.5$ untuk vertikal.



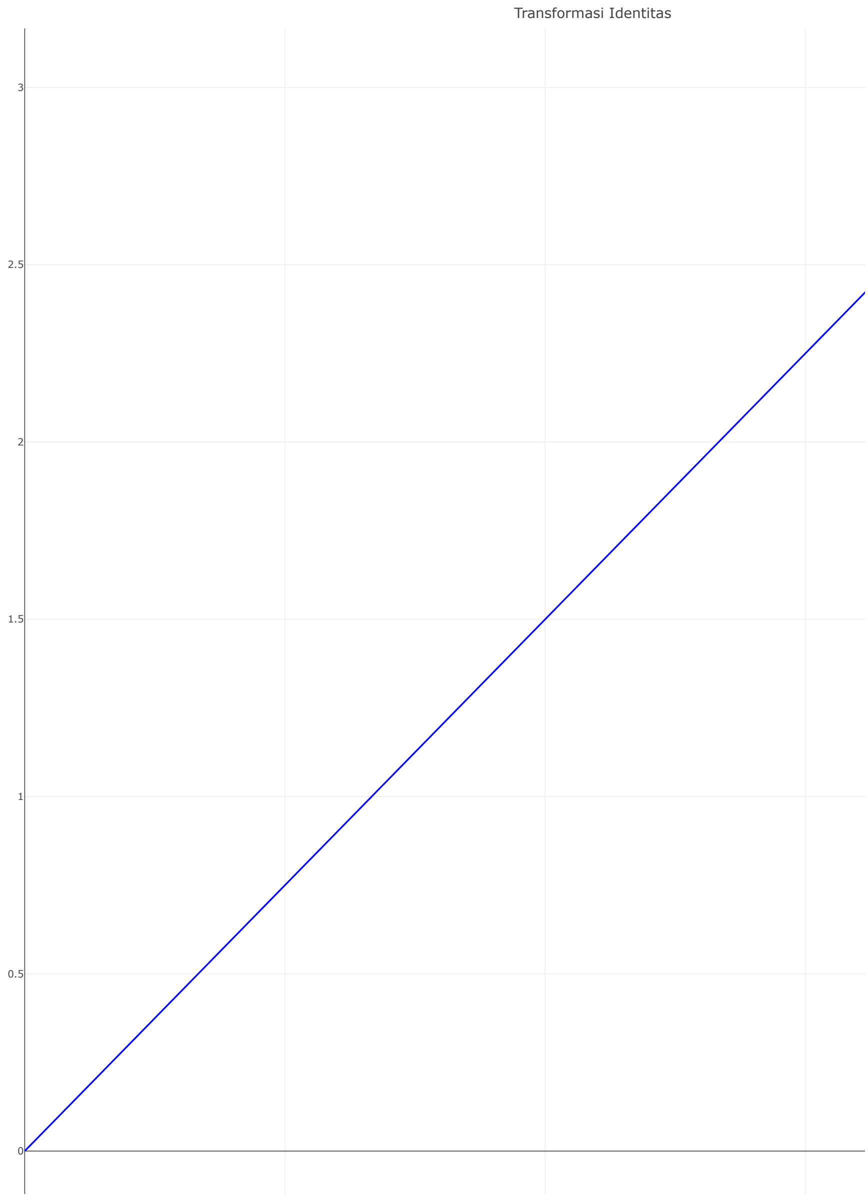
6.3 Transformasi Linear 3D

Dalam ruang 3D, transformasi linear dapat diterapkan ke vektor untuk menghasilkan efek seperti rotasi, refleksi, atau scaling. Berikut adalah beberapa contoh transformasi umum beserta ilustrasinya.

6.3.1 Transformasi Identitas 3D

Transformasi identitas tidak mengubah posisi atau arah vektor. Jika kita memiliki vektor $\mathbf{v} = (2, 3, 5)$, maka hasil transformasi identitas adalah:

$$I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$



6.3.2 Transformasi Nol 3D

Transformasi nol adalah jenis transformasi yang mengubah semua komponen vektor menjadi nol, menghilangkan informasi arah dan besarannya. Jika kita memiliki vektor $\mathbf{v} = (2, 3, 5)$, maka hasil transformasi nol adalah:

$$T_0(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan kata lain, transformasi nol memetakan setiap vektor dalam ruang 3D ke vektor nol $(0, 0, 0)$.

6.3.3 Transformasi Rotasi 3D

Rotasi dalam ruang 3D dapat didefinisikan sebagai perubahan posisi vektor melalui sudut tertentu (θ) di sekitar sumbu (X, Y, atau Z).

Rrotasi 3D dapat dilakukan dengan matriks rotasi untuk rotasi di sekitar sumbu X, Y, dan Z masing-masing adalah sebagai berikut:

1. **Rotasi di sekitar sumbu X**:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

2. **Rotasi di sekitar sumbu Y**:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

3. **Rotasi di sekitar sumbu Z**:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk memutar vektor $\mathbf{v}$ di sekitar sumbu tertentu, kita kalikan vektor tersebut dengan matriks rotasi yang sesuai. Misalkan vektor $\mathbf{v}$ didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Maka hasil rotasi $\mathbf{v}'$ dapat diperoleh dengan:

$$\mathbf{v}' = R(\theta) \cdot \mathbf{v}$$

di mana $R(\theta)$ adalah matriks rotasi sesuai sumbu yang dipilih. Andaikan Vektor awal $(1, 2, 3)$ dan dilakukan Transformasi Rotasi 3D, perhatikan visualisasi berikut:

6.3.4 Transformasi Refleksi 3D

Refleksi dalam ruang 3D dapat didefinisikan sebagai perubahan posisi vektor dengan cara membalikkan komponennya di sepanjang sumbu atau bidang tertentu. Misalnya, jika kita melakukan refleksi terhadap bidang XY, maka komponen Z dari vektor akan diubah tanda.

Matriks refleksi untuk masing-masing bidang koordinat dalam 3D adalah sebagai berikut:

1. **Refleksi terhadap bidang XY**:

$$R_{XY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. **Refleksi terhadap bidang YZ**:

$$R_{YZ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Refleksi terhadap bidang XZ**:

$$R_{XZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk memantulkan vektor $\mathbf{v}$ terhadap bidang tertentu, kita kalikan vektor tersebut dengan matriks refleksi yang sesuai. Misalkan vektor $\mathbf{v}$ didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Maka hasil refleksi $\mathbf{v}'$ dapat diperoleh dengan:

$$\mathbf{v}' = R \cdot \mathbf{v}$$

di mana R adalah matriks refleksi sesuai bidang yang dipilih. Andaikan Vektor awal $(1, 2, 3)$ dan dilakukan Transformasi Refleksi 3D, perhatikan visualisasi berikut:

6.3.5 Transformasi Penskalaan 3D

Transformasi penskalaan adalah proses yang digunakan untuk mengubah ukuran objek dalam ruang tiga dimensi. Dengan penskalaan, kita dapat memperbesar atau memperkecil dimensi objek sesuai dengan kebutuhan. Transformasi ini dapat dilakukan secara uniform (seragam) di mana faktor penskalaan adalah sama untuk semua sumbu, atau non-uniform (tidak seragam) di mana faktor penskalaan berbeda untuk setiap sumbu.

Dalam konteks transformasi penskalaan, kita dapat mendefinisikan transformasi sebagai berikut:

$$\mathbf{v}' = S \cdot \mathbf{v}$$

di mana:

- $\mathbf{v}$ adalah vektor posisi awal,
- $\mathbf{v}'$ adalah vektor posisi setelah penskalaan,
- S adalah matriks penskalaan.

Matriks penskalaan di ruang 3D dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berikut:

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}$$

Di mana: - s_x, s_y, dan s_z adalah faktor penskalaan untuk sumbu X, Y, dan Z, masing-masing.

Misalkan kita memiliki vektor $\mathbf{v}$ yang dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Setelah penskalaan, vektor baru $\mathbf{v}'$ dapat diperoleh melalui:

$$\mathbf{v}' = S \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \\ s_z \cdot z \end{bmatrix}$$

Berikut adalah contoh visualisasi dari vektor asli dan hasil penskalaan. Misalhkan vektor awal $(1,2,3), Vektor baru $\mathbf{v}'$ setelah penskalaan dapat diperoleh melalui:

$$\mathbf{v}' = S \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. **Baris Pertama**:
$$2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 2$$
2. **Baris Kedua**:
$$0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 6$$
3. **Baris Ketiga**:
$$0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0.5 \cdot 3 = 1.5$$

Vektor baru setelah penskalaan menjadi:

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

6.3.6 Transformasi Penyerapan 3D

Dalam konteks transformasi penyerapan, kita dapat mendefinisikan transformasi sebagai berikut:

$$\mathbf{v}' = H \cdot \mathbf{v}$$

di mana:

- $\mathbf{v}$ adalah vektor posisi awal,
- $\mathbf{v}'$ adalah vektor posisi setelah penyerapan,
- H adalah matriks penyerapan.

Matriks penyerapan di ruang 3D dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berikut:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & sh_{xy} & sh_{xz} \\ sh_{yx} & 1 & sh_{yz} \\ sh_{zx} & sh_{zy} & 1 \end{bmatrix}$$

Di mana:

- sh_{xy}, sh_{xz}, sh_{yx}, sh_{yz}, sh_{zx}, dan sh_{zy} adalah faktor penyerapan untuk masing-masing kombinasi sumbu.

Misalkan kita memiliki vektor $\mathbf{v}$ yang dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Setelah penyerapan, vektor baru $\mathbf{v}'$ dapat diperoleh melalui:

$$\mathbf{v}' = H \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & sh_{xy} & sh_{xz} \\ sh_{yx} & 1 & sh_{yz} \\ sh_{zx} & sh_{zy} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + sh_{xy} \cdot y + sh_{xz} \cdot z \\ sh_{yx} \cdot x + y + sh_{yz} \cdot z \\ sh_{zx} \cdot x + sh_{zy} \cdot y + z \end{bmatrix}$$

Misalkan kita menggunakan faktor penyerapan sebagai berikut:

- $sh_{xy} = 0.5$
- $sh_{xz} = 0.2$
- $sh_{yx} = 0.1$
- $sh_{yz} = 0.3$
- $sh_{zx} = 0.4$
- $sh_{zy} = 0.1$

Dengan vektor awal $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, maka kita dapat menghitung vektor baru $\mathbf{v}'$ sebagai berikut:

$$\mathbf{v}' = H \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Hasil dari perhitungan di atas adalah:

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} 2.6 \\ 3.0 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

Jadi, hasil dari transformasi penyerapan pada vektor $(1, 2, 3)$ adalah $(2.6, 3.0, 3.6)$.

Berikut adalah contoh visualisasi dari vektor asli dan hasil penyerapan.

6.4 Transformasi Linear $n - D$

Transformasi linear dapat diklasifikasikan menjadi beberapa jenis berdasarkan bagaimana mereka mempengaruhi vektor dalam ruang berdimensi n. Berikut adalah beberapa jenis transformasi linear yang umum dalam dimensi n.

6.4.1 Transformasi Identitas

Transformasi identitas adalah transformasi yang tidak mengubah vektor. Untuk vektor $\mathbf{v}$ dalam ruang vektor berdimensi n, transformasi identitas I_n dinyatakan sebagai:

$$I_n(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

Sifat Transformasi Identitas:

- **Mempertahankan Arah dan Magnitudo**: Vektor tetap dalam arah dan panjang yang sama.
- **Matriks Identitas** $n \times n$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

6.4.2 Transformasi Nol

Transformasi nol mengubah setiap vektor menjadi vektor nol. Untuk setiap vektor $\mathbf{v}$ dalam ruang berdimensi n, transformasi nol T adalah:

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Sifat Transformasi Nol:

- **Menghasilkan Vektor Nol**: Semua vektor menjadi vektor nol.
- **Matriks Nol** $n \times n$:

$$0_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

6.4.3 Transformasi Rotasi

Rotasi di ruang dimensi lebih tinggi adalah rotasi di sekitar dua sumbu, misalnya sumbu x_i dan x_j. Dalam n-dimensi, rotasi di sekitar dua sumbu (misalnya, x_1 dan x_2) dengan sudut θ dinyatakan sebagai matriks rotasi $R_{ij}(\theta)$, dengan blok 2×2 di posisi i dan j:

$$R_{ij}(\theta) = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \\ & \sin(\theta) & \cos(\theta) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Dimana hanya elemen-elemen di baris dan kolom i dan j yang dipengaruhi rotasi.

6.4.4 Transformasi Refleksi

Refleksi dalam n dimensi adalah refleksi terhadap suatu hiperbidang. Misalnya, refleksi terhadap hiperbidang yang tegak lurus terhadap sumbu x_i dapat dinyatakan dengan matriks refleksi R_i, yang mengubah tanda komponen i dari vektor:

$$R_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

6.4.5 Transformasi Penskalaan

Penskalaan dalam n dimensi memperbesar atau memperkecil setiap komponen vektor dengan skalar k. Untuk vektor $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, penskalaan menjadi:

$$S_k(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} k \cdot x_1 \\ k \cdot x_2 \\ \vdots \\ k \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Atau dalam bentuk matriks penskalaan:

$$S_k = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

6.4.6 Transformasi Penyerapan

Shearing dalam n dimensi menggeser satu komponen vektor berdasarkan komponen lainnya. Misalnya, **shearing horizontal** (mengubah komponen x_i berdasarkan x_j) dapat dinyatakan sebagai:

$$S_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i + k_{ij} \cdot x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Atau dalam bentuk matriks shearing:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & k_{ij} & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.5 Sifat Transformasi Linear

Secara formal, transformasi linear T dari ruang vektor V ke ruang vektor W memenuhi dua sifat utama berikut:

6.5.1 Aditif (Penambahan Vektor)

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

Artinya, transformasi dari penjumlahan dua vektor sama dengan penjumlahan transformasi masing-masing vektor.

6.5.2 Homogenitas (Perkalian Skalar)

$$T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$$

Artinya, jika sebuah vektor dikalikan dengan skalar, maka hasil transformasinya juga akan dikalikan dengan skalar yang sama.

Transformasi linear sering kali direpresentasikan dengan matriks ketika bekerja dalam ruang berdimensi hingga, sehingga operasi transformasi bisa dituliskan dalam bentuk perkalian matriks dengan vektor. Transformasi linear memiliki aplikasi luas dalam berbagai bidang, seperti grafika komputer, pengolahan sinyal, dan mekanika klasik, di mana perubahan bentuk atau keadaan dapat dimodelkan dengan hubungan linier.

6.6 Terapan Transformasi Linear

Transformasi linear memiliki banyak aplikasi di bidang teknik pertambangan. Berikut adalah beberapa cara penerapannya:

6.6.1 Analisis Geometrik dan Model 3D

- **Transformasi Penskalaan**: Mengubah ukuran model geologi untuk analisis.
- **Transformasi Rotasi dan Refleksi**: Memperoleh orientasi berbeda dari formasi batuan.

6.6.2 Pengolahan Data Geospasial

- **Koordinat UTM dan Geographic**: Mengubah sistem koordinat untuk pemetaan.
- **Georeferensi**: Mengubah citra satelit ke dalam sistem koordinat tertentu.

6.6.3 Perhitungan Volume dan Area

- **Volume Tambang**: Menghitung volume dengan model digital.
- **Perhitungan Lahan Terpakai**: Menghitung area infrastruktur penambangan.

6.6.4 Simulasi dan Model Dinamis

- **Simulasi Aliran Air**: Menganalisis aliran air dalam tambang.
- **Model Stabilitas Lereng**: Memprediksi stabilitas lereng penambangan.

6.6.5 Pemodelan Geomekanik

- **Analisis Tegangan dan Regangan**: Memahami respons batuan terhadap gaya luar.
- **Studi Keruntuhan**: Memprediksi potensi keruntuhan dalam tambang.

6.6.6 Pengolahan Citra dan Pemodelan 3D

- **Segmentasi Citra**: Membagi citra geologi menjadi area berbeda.
- **Rekonstruksi 3D**: Membangun model 3D dari data citra.

6.6.7 Optimasi dan Perencanaan Produksi

- **Jadwal Produksi**: Mengoptimalkan jadwal dan alokasi sumber daya.
- **Model Ekonomi**: Menganalisis biaya dan pendapatan proyek.

6.7 Studi Kasus: Menghitung Volume Tambang

6.7.1 Latar Belakang

Dalam proyek penambangan, kita sering kali perlu menghitung volume dan mengubah koordinat titik untuk perencanaan. Dalam studi kasus ini, kita akan menggunakan transformasi matriks untuk menghitung volume dari bentuk tambang yang terdefinisi oleh beberapa titik.

6.7.2 Data

Misalkan kita memiliki 4 titik yang membentuk bentuk tambang, masing-masing dengan koordinat (x, y, z) sebagai berikut:

Titik	x	y	z
A	0	0	10
B	5	0	10

Titik	x	y	z
C	5	5	5
D	0	5	5

6.7.3 Matriks Koordinat

Kita dapat mendefinisikan matriks koordinat P dari titik-titik tersebut sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 10 \\ 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

6.7.4 Transformasi Matriks

Kita ingin menerapkan transformasi penskalaan untuk memperbesar ukuran tambang. Misalkan kita menggunakan faktor penskalaan S sebagai berikut:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.7.4.1 Menghitung Matriks Koordinat Setelah Penskalaan

Transformasi matriks dapat dilakukan dengan mengalikan matriks penskalaan S dengan matriks koordinat P:

$$P' = S \cdot P$$

Mari kita lakukan perhitungan:

1. **Matriks Penskalaan**:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. **Matriks Koordinat Awal**:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 10 \\ 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

3. **Matriks Koordinat Setelah Penskalaan**:

$$P' = S \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 10 \\ 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 & 0 \cdot 10 + 0 \cdot 10 + 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 5 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 & 0 \cdot 10 + 0 \cdot 10 + 1 \cdot 10 \\ 2 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 5 & 0 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 10 & 0 & 10 \\ 10 & 10 & 5 \\ 0 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

Menghitung Volume Tambang

Dengan menggunakan metode prisma seperti yang dijelaskan sebelumnya, kita dapat menghitung volume tambang setelah penskalaan.

- Luas alas (A):
$$A = \text{panjang} \times \text{lebar} = 10 \times 10 = 100$$

- Tinggi (h):
$$h = z_A - z_C = 10 - 5 = 5$$

- Volume (V):
$$V = A \cdot h = 100 \cdot 5 = 500$$

Kesimpulan

Setelah melakukan transformasi matriks dengan penskalaan dan menghitung volume tambang, kita menemukan bahwa volume tambang setelah penskalaan adalah **500 m³**. Penggunaan matriks dalam perhitungan ini sangat membantu untuk mengelola dan menganalisis data geometris dalam proyek penambangan. Perhatikan Visualisasi berikut:

6.8 Studi Kasus: Penjadwalan Produksi di Tambang

6.8.1 Latar Belakang

Penjadwalan produksi di tambang merupakan proses penting dalam manajemen sumber daya dan efisiensi operasi. Dalam studi kasus ini, kita akan menghitung jadwal produksi mingguan untuk tiga jenis mineral yang berbeda berdasarkan kapasitas produksi dan kebutuhan permintaan.

6.8.2 Data

Misalkan kita memiliki data berikut untuk tiga mineral: Bijih Emas (A), Bijih Tembaga (B), dan Bijih Perak (C). Kapasitas produksi harian untuk setiap mineral dan permintaan mingguan adalah sebagai berikut:

Mineral	Kapasitas Produksi (ton/hari)	Permintaan Mingguan (ton)
Bijih Emas (A)	20	240
Bijih Tembaga (B)	15	105
Bijih Perak (C)	10	70

Pertanyaan:

1. Hitung jumlah total kapasitas produksi harian untuk ketiga mineral.
2. Berapa banyak hari yang diperlukan untuk memenuhi permintaan mingguan dari masing-masing mineral?
3. Berdasarkan perhitungan tersebut, buatlah jadwal produksi harian yang optimal selama seminggu untuk ketiga mineral, sehingga permintaan dapat terpenuhi dan memaksimalkan kapasitas produksi.
4. Jika ada kendala dalam produksi, seperti tidak dapat memproduksi lebih dari 5 hari dalam seminggu untuk Bijih Tembaga (B), bagaimana dampaknya terhadap jadwal produksi? Hitung dan jelaskan.

6.9 Studi Kasus: Analisis Keruntuhan Lereng Tambang

6.9.1 Latar Belakang

Dalam teknik pertambangan, stabilitas lereng tambang merupakan faktor kritis yang dapat mempengaruhi keselamatan kerja dan produktivitas. Studi ini bertujuan untuk menganalisis perubahan bentuk lereng tambang 3D akibat tekanan yang diterapkan, menggunakan transformasi linear untuk memodelkan perubahan tersebut.

6.9.2 Data

Misalkan kita memiliki titik-titik yang mendefinisikan bentuk awal lereng dalam ruang 3D sebagai berikut:

Titik	Koordinat (x, y, z)
A	(1, 3, 2)
B	(2, 5, 3)
C	(3, 2, 4)
D	(4, 4, 1)

6.9.3 Matriks Transformasi

Andaikan efek deformasi akibat beban, dapat di interpretasikan menggunakan matriks penskalaan dalam bentuk berikut:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Matriks ini akan mengubah posisi y dan z dari setiap titik menjadi setengah dari nilai aslinya, yang menggambarkan penurunan lereng akibat tekanan.

Pertanyaan:

1. **Deskripsi Matriks**: Apa yang digambarkan oleh matriks penskalaan S dalam konteks stabilitas lereng tambang? Mengapa kita hanya menurunkan nilai y dan z?
2. **Transformasi**: Jika koordinat awal titik B adalah $(2, 5, 3)$, hitunglah koordinat baru titik B setelah menerapkan transformasi yang sama (penskalaan) seperti yang dilakukan pada titik A.
3. **Interpretasi Hasil**: Apa arti dari posisi baru titik setelah transformasi? Bagaimana perubahan ini dapat mempengaruhi stabilitas lereng tambang?
4. **Matriks Rotasi**: Sebutkan nilai-nilai dari $\cos(30^\circ)$ dan $\sin(30^\circ)$. Bagaimana nilai ini digunakan dalam perhitungan posisi baru titik?
5. **Dampak Deformasi**: Diskusikan kemungkinan dampak dari deformasi lereng tambang akibat penurunan nilai y dan z. Apa risiko yang mungkin terjadi?

Chapter 7

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen dan vektor eigen adalah konsep dasar dalam matematika yang membantu kita memahami bagaimana objek dapat berubah saat dikenakan transformasi. Dalam konteks Teknik Pertambangan, insinyur menggunakan nilai eigen untuk mengevaluasi keamanan dan stabilitas struktur, seperti lereng tambang atau terowongan. Nilai eigen dapat membantu insinyur menentukan apakah sebuah lereng cukup kuat untuk menahan beban tanpa runtuh. Sementara itu, vektor eigen menggambarkan arah perubahan, sehingga insinyur dapat memahami bagaimana tekanan atau gaya mempengaruhi struktur tersebut.

Selain dalam Teknik Pertambangan, nilai eigen dan vektor eigen juga digunakan dalam berbagai bidang lainnya. Di bidang teknik sipil, konsep ini membantu dalam analisis getaran dan stabilitas bangunan. Dengan pemahaman nilai dan vektor eigen, para insinyur dan ilmuwan dapat merancang serta mengelola sistem dengan lebih baik, sehingga meningkatkan keselamatan, efisiensi, dan akurasi dalam berbagai aplikasi di dunia nyata.

7.1 Definisi

7.1.1 Nilai Eigen

Nilai eigen adalah skalar yang mencerminkan perubahan skala dari vektor ketika matriks transformasi diterapkan padanya. Dalam konteks aljabar linear, jika A adalah matriks persegi dan x adalah vektor non-nol, maka nilai eigen λ dari matriks A didefinisikan melalui persamaan:

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa ketika matriks A diterapkan pada vektor x, hasilnya adalah vektor yang searah dengan x tetapi diperbesar atau diperkecil berdasarkan faktor skala λ. Untuk menemukan nilai eigen, kita harus menyelesaikan persamaan karakteristik:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Di mana I adalah matriks identitas. Determinan ini menghasilkan polinomial yang memiliki derajat sama dengan dimensi matriks A, dan solusi dari polinomial tersebut memberikan nilai-nilai eigen.

7.1.2 Vektor Eigen

Vektor eigen adalah vektor yang terkait dengan nilai eigen. Vektor ini adalah solusi dari persamaan:

$$(A - \lambda I) \cdot x = 0$$

Di mana A adalah matriks, λ adalah nilai eigen, dan I adalah matriks identitas. Vektor eigen x adalah vektor non-nol yang menunjukkan arah tertentu dalam ruang vektor yang tidak berubah ketika dikenakan transformasi oleh matriks A.

Sebagai contoh, jika kita memiliki nilai eigen λ dari matriks A, maka vektor eigen yang terkait adalah vektor x yang memenuhi persamaan di atas. Vektor eigen memberikan informasi penting tentang struktur dan perilaku sistem yang direpresentasikan oleh matriks.

Secara singkat, nilai eigen adalah skalar yang menunjukkan faktor perubahan skala ketika suatu matriks diterapkan pada vektor, sementara vektor eigen adalah vektor yang tidak berubah arah di bawah transformasi matriks tersebut. Kedua konsep ini sangat penting dalam analisis sistem, mekanika, dan berbagai bidang lainnya dalam ilmu pengetahuan dan teknik.

7.2 Nilai Eigen & Vektor Eigen 2D

Nilai eigen 2D mengacu pada nilai eigen yang dihasilkan dari matriks transformasi dua dimensi. Dalam konteks geometri, matriks 2D dapat merepresentasikan transformasi seperti rotasi, skala, dan refleksi. Jika kita memiliki matriks A yang berukuran 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Nilai eigen λ dari matriks A didefinisikan dengan persamaan:

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

Di mana x adalah vektor eigen yang bukan vektor nol. Untuk menemukan nilai eigen, kita perlu menyelesaikan persamaan karakteristik yang diperoleh dari determinan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Di mana I adalah matriks identitas berukuran 2×2. Persamaan ini menghasilkan polinomial kuadrat, yang dapat digunakan untuk menentukan nilai eigen λ. Setiap nilai eigen akan memiliki vektor eigen yang sesuai, yang menunjukkan arah vektor yang tidak berubah ketika dikenakan transformasi oleh matriks A.

Misalkan kita memiliki matriks transformasi berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Untuk menemukan nilai eigen dari matriks ini, kita harus menyelesaikan persamaan karakteristik:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Dengan I adalah matriks identitas 2×2:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Kita hitung determinannya:

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(2-\lambda) - (1)(1) = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

Menyederhanakan:

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0(2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = 0(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Dari persamaan di atas, kita mendapatkan dua nilai eigen:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = 3$$

Sekarang kita akan mencari vektor eigen yang sesuai dengan masing-masing nilai eigen.

1. **Untuk** $\lambda_1 = 1$:

$$A - \lambda_1 I = A - 1I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Menyelesaikan sistem persamaan $A \cdot x = 1 \cdot x$ menghasilkan vektor eigen:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. **Untuk** $\lambda_2 = 3$:

$$A - \lambda_2 I = A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Menyelesaikan sistem persamaan $A \cdot x = 3 \cdot x$ menghasilkan vektor eigen:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 = 1$ dengan vektor eigen $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dan $\lambda_2 = 3$ dengan vektor eigen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nilai dan vektor eigen ini memberikan informasi penting tentang bagaimana objek dalam ruang dua dimensi akan tertransformasi oleh matriks A.

7.3 Nilai Eigen & Vektor Eigen 3D

Nilai eigen 3D mengacu pada nilai eigen yang dihasilkan dari matriks transformasi tiga dimensi. Dalam konteks geometri dan aljabar linear, matriks 3D dapat merepresentasikan transformasi seperti rotasi, skala, dan refleksi dalam ruang tiga dimensi. Jika kita memiliki matriks A yang berukuran 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Nilai eigen λ dari matriks A didefinisikan melalui persamaan:

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

Di mana x adalah vektor eigen yang bukan vektor nol. Untuk menemukan nilai eigen, kita harus menyelesaikan persamaan karakteristik yang diperoleh dari determinan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Di mana I adalah matriks identitas berukuran 3×3. Persamaan ini menghasilkan polinomial kubik yang dapat digunakan untuk menentukan nilai eigen λ. Setiap nilai eigen akan memiliki vektor eigen yang sesuai, yang menunjukkan arah vektor yang tidak berubah ketika dikenakan transformasi oleh matriks A.

Misalkan kita memiliki matriks transformasi berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Untuk menemukan nilai eigen dari matriks ini, kita harus menyelesaikan persamaan karakteristik:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Dengan I adalah matriks identitas 3×3:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Kita hitung determinannya:

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 0 - 0 = 0$$

Menyederhanakan:

$$(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

Dari persamaan di atas, kita mendapatkan tiga nilai eigen:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 3, \quad \text{dan} \quad \lambda_3 = 2$$

Sekarang kita akan mencari vektor eigen yang sesuai dengan masing-masing nilai eigen.

1. **Untuk** $\lambda_1 = 4$:

$$A - \lambda_1 I = A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Menyelesaikan sistem persamaan $A \cdot x = 4 \cdot x$ menghasilkan vektor eigen:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. **Untuk** $\lambda_2 = 3$:

$$A - \lambda_2 I = A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Menyelesaikan sistem persamaan $A \cdot x = 3 \cdot x$ menghasilkan vektor eigen:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. **Untuk** $\lambda_3 = 2$:

$$A - \lambda_3 I = A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Menyelesaikan sistem persamaan $A \cdot x = 2 \cdot x$ menghasilkan vektor eigen:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 = 4$ dengan vektor eigen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$ dengan vektor eigen $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $\lambda_3 = 2$ dengan vektor eigen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nilai dan vektor eigen ini memberikan informasi penting tentang bagaimana objek dalam ruang tiga dimensi akan tertransformasi oleh matriks A.

7.4 Nilai Eigen & Vektor Eigen $n - D$

Nilai eigen nD mengacu pada nilai eigen yang dihasilkan dari matriks transformasi dalam ruang berdimensi n. Dalam aljabar linear, matriks nD dapat merepresentasikan transformasi kompleks yang mencakup berbagai jenis transformasi linear, seperti rotasi, skala, dan refleksi, dalam ruang berdimensi lebih dari tiga. Jika kita memiliki matriks A yang berukuran $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nilai eigen λ dari matriks A didefinisikan melalui persamaan:

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

Di mana x adalah vektor eigen yang bukan vektor nol. Untuk menemukan nilai eigen, kita harus menyelesaikan persamaan karakteristik yang diperoleh dari determinan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Di mana I adalah matriks identitas berukuran $n \times n$. Persamaan ini menghasilkan polinomial yang memiliki derajat n, yang dapat digunakan untuk menentukan nilai eigen λ. Setiap nilai eigen akan memiliki vektor eigen yang sesuai, yang menunjukkan arah vektor yang tidak berubah ketika dikenakan transformasi oleh matriks A.

7.5 Karakteristik Nilai Eigen

Nilai eigen dapat dibedakan menjadi beberapa jenis berdasarkan tanda dari nilai tersebut. Dalam konteks nD, dua kategori penting adalah nilai eigen positif dan negatif. Keduanya memiliki interpretasi yang berbeda dalam hal transformasi linear yang dilakukan oleh matriks.

7.5.1 Nilai Eigen Positif

Definisi: Nilai eigen positif adalah nilai eigen yang lebih besar dari nol, yaitu $\lambda > 0$.

Interpretasi: Ketika suatu matriks A memiliki nilai eigen positif, ini berarti bahwa vektor eigen terkait akan mengalami pembesaran atau perpanjangan saat matriks diterapkan. Vektor tersebut akan tetap berada pada arah yang sama dengan arah vektor eigen aslinya.

Misalkan kita memiliki matriks A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen, kita menghitung determinan dari $A - \lambda I$:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 3$, keduanya positif. Jika kita mengambil vektor eigen $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ untuk $\lambda_1 = 2$:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hasilnya menunjukkan bahwa vektor eigen telah diperbesar.

7.5.2 Nilai Eigen Negatif

Definisi: Nilai eigen negatif adalah nilai eigen yang kurang dari nol, yaitu $\lambda < 0$.

Interpretasi: Ketika suatu matriks A memiliki nilai eigen negatif, vektor eigen terkait akan mengalami refleksi dan perubahan arah saat matriks diterapkan. Vektor eigen akan tetap berada pada garis yang sama tetapi dengan arah yang berlawanan.

Misalkan kita memiliki matriks B:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen, kita menghitung determinan dari $B - \lambda I$:

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 3$. Di sini, $\lambda_1 = -1$ adalah nilai eigen negatif. Jika kita mengambil vektor eigen $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ untuk $\lambda_1 = -1$:

$$B \cdot y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hasilnya menunjukkan bahwa arah vektor eigen telah dibalik.

Catatan: Nilai eigen positif dan negatif memiliki peran penting dalam analisis sistem dinamis dan geometri transformasi. Memahami perilaku nilai eigen ini membantu dalam menggambarkan bagaimana vektor berperilaku ketika diterapkan dengan transformasi linear yang ditentukan oleh matriks. Nilai eigen positif menunjukkan pembesaran, sementara nilai eigen negatif menunjukkan refleksi dan perubahan arah vektor.

7.6 Analisis Stabilitas Fondasi

Seorang insinyur geoteknik ditugaskan untuk menganalisis stabilitas fondasi dari struktur bangunan tambang yang baru. Fondasi tersebut memiliki spesifikasi sebagai berikut:

- **Beban Vertikal (P)**: 1000 kN
- **Dimensi Fondasi**: 5 m x 5 m
- **Kepadatan Material Tanah**: 20 kN/m³
- **Modulus Elastisitas Tanah (E)**: 50 MPa
- **Koefisien Poisson ( )**: 0.3

Insinyur perlu menentukan stabilitas fondasi dengan menghitung faktor keamanan (FK) menggunakan analisis nilai eigen dan vektor eigen dari matriks yang merepresentasikan perilaku elastis fondasi.

Langkah 1: Definisikan Matriks Kekakuan

Matriks kekakuan K digunakan untuk menggambarkan hubungan antara gaya dan perpindahan dalam sebuah sistem mekanik, seperti fondasi yang terpapar gaya eksternal. Matriks ini berbentuk matriks diagonal, dengan nilai-nilai kekakuan masing-masing arah x dan y.

Secara matematis, matriks kekakuan K untuk sistem dua dimensi (dengan gaya dan perpindahan dalam dua arah x dan y) dapat dituliskan sebagai:

$$K = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix}$$

Di mana:

- k_x adalah kekakuan sistem dalam arah x,
- k_y adalah kekakuan sistem dalam arah y.

Kekakuan ini dihitung menggunakan rumus dasar fisika untuk material elastis, yaitu:

$$k_x = k_y = \frac{E \cdot A}{L}$$

Di mana:

- E adalah modulus elastisitas material (sering dalam satuan pascal, Pa),
- A adalah luas penampang fondasi,
- L adalah panjang fondasi (dimana di sini digunakan panjang fondasi satu dimensi).

Langkah 2: Hitung Kekakuan Fondasi

Untuk menghitung kekakuan k_x dan k_y, kita membutuhkan nilai-nilai berikut:

- Modulus elastisitas (E) = 50 MPa = 50×10^6 Pa (1 MPa = 10^6 Pa),
- Luas penampang (A) = 25 m² (menggunakan panjang sisi fondasi $5\,\text{m} \times 5\,\text{m}$),
- Panjang fondasi (L) = 5 m.

Dengan memasukkan nilai-nilai ini ke dalam rumus kekakuan:

$$k_x = k_y = \frac{50 \times 10^6\,\text{Pa} \cdot 25\,\text{m}^2}{5\,\text{m}} = \frac{1.25 \times 10^8\,\text{N}}{5\,\text{m}} = 2.5 \times 10^7\,\text{N/m}$$

Jadi, kekakuan k_x dan k_y masing-masing adalah $2.5 \times 10^7\,\text{N/m}$.

Namun, dalam soal Anda, angka 10^6 digunakan karena modulus elastisitas dalam soal adalah **50 MPa**, yang setara dengan 50×10^6 Pa, sehingga perhitungan kekakuan yang lebih tinggi menghasilkan nilai-nilai yang berhubungan dengan satuan besar Newton, yang biasa ditulis dalam bentuk eksponensial seperti 10^6 atau 10^7 untuk menghindari penggunaan angka yang terlalu besar.

Langkah 3: Hitung Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Setelah mendefinisikan matriks kekakuan, kita melanjutkan untuk menghitung **nilai eigen** dan **vektor eigen** dari matriks K. Nilai eigen (λ) dan vektor eigen ($\vec{v}$) ditemukan melalui persamaan karakteristik dari matriks K:

$$\det(K - \lambda I) = 0$$

Di mana:

- I adalah matriks identitas 2x2:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Maka, $K - \lambda I$ dapat dituliskan sebagai:

$$K - \lambda I = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^7 - \lambda & 0 \\ 0 & 2.5 \times 10^7 - \lambda \end{pmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen, kita menghitung determinan dari $K - \lambda I$:

$$\det(K - \lambda I) = (2.5 \times 10^7 - \lambda)(2.5 \times 10^7 - \lambda) = 0$$

Persamaan karakteristiknya menjadi:

$$(2.5 \times 10^7 - \lambda)^2 = 0$$

Ini menunjukkan bahwa ada dua nilai eigen yang sama (nilai eigen ganda), yaitu:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.5 \times 10^7 \,\mathrm{N/m}$$

Langkah 4: Hitung Vektor Eigen

Setelah mendapatkan nilai eigen, kita dapat mencari **vektor eigen**. Untuk itu, kita substitusikan nilai eigen $\lambda = 2.5 \times 10^7$ ke dalam persamaan:

$$(K - \lambda I)\vec{x} = 0$$

Dengan memasukkan nilai K dan λ, kita dapatkan sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Ini menunjukkan bahwa vektor eigen dapat berupa:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berikut diperlihatkan Visualisasi Analisis Stabilitas Fondasi Menggunakan Nilai Eigen dan Vektor Eigen:

Hasil dan Interpretasi

- **Faktor Keamanan (FK)**: Dengan hasil FK sekitar 1.33, ini menunjukkan bahwa fondasi memiliki stabilitas yang baik dan dapat mendukung beban yang diterapkan dengan aman. Umumnya, FK yang lebih besar dari 1,0 menunjukkan bahwa struktur dapat ditangani dengan aman.
- **Nilai Eigen**: Dalam analisis, nilai eigen positif menunjukkan bahwa fondasi memiliki respons elastis yang stabil terhadap beban. Jika terdapat nilai eigen

negatif atau nol, ini akan menandakan potensi risiko kegagalan.

- **Vektor Eigen**: Arah vektor eigen menunjukkan gaya yang diterapkan dan bagaimana material akan merespons. Ini membantu dalam menentukan apakah ada area yang memerlukan perbaikan tambahan untuk memastikan stabilitas jangka panjang.

Chapter 8

Dekomposisi Nilai Singular

8.1 Konsep dan Definisi

8.2 Proses Dekomposisi Matriks

8.3 Terapan Dekomposisi Nilai Singular

Chapter 9

Metode Simpleks

9.1 Konsep Dasar Metode Simpleks

9.2 Prosedur Metode Simpleks

9.3 Penerapan Metode Simpleks

Chapter 10

Metode Kuadrat Terkecil

10.1 Konsep Dasar Metode Kuadrat Terkecil

10.2 Prosedur Metode Kuadrat Terkecil

10.3 Penerapan Metode Kuadrat Terkecil

Chapter 11

Program_Linear

11.1 Konsep Dasar Program Linear

11.2 Prosedur Program Linear

11.3 Penerapan Program Linear

Chapter 12

Studi Kasus

Epilog

Aljabar linear memainkan peran yang sangat penting dalam berbagai aspek teknik pertambangan. Dalam industri ini, analisis data, pemodelan, dan optimasi sangat diperlukan untuk meningkatkan efisiensi, meminimalkan risiko, dan memaksimalkan hasil produksi. Berikut ini adalah beberapa cara di mana aljabar linear diterapkan dalam teknik pertambangan:

Pemodelan Geologi

Dalam eksplorasi pertambangan, aljabar linear digunakan untuk memodelkan struktur geologi. Matriks digunakan untuk merepresentasikan data geologi, seperti kedalaman lapisan, jenis batuan, dan keberadaan mineral. Dengan menerapkan teknik pemodelan berbasis matriks, insinyur pertambangan dapat menganalisis dan memvisualisasikan data untuk menentukan lokasi yang paling menjanjikan untuk pengeboran.

Analisis Data

Teknik pertambangan menghasilkan volume data yang besar dari berbagai sumber, seperti survei geofisika, pengujian sampel, dan pemantauan lingkungan. Aljabar linear memungkinkan analisis data tersebut melalui teknik seperti Dekomposisi Nilai Singular (SVD) dan Regresi Linier. Ini membantu dalam mengidentifikasi pola dan hubungan antar variabel, yang penting untuk pengambilan keputusan yang informasional.

Optimasi Proses Pertambangan

Optimasi adalah kunci dalam pengelolaan sumber daya dan operasional di tambang. Dengan menggunakan metode aljabar linear, seperti metode simpleks, insinyur dapat mengembangkan model matematis yang meminimalkan biaya dan memaksimalkan output. Model ini mempertimbangkan berbagai faktor, termasuk biaya operasional, kualitas mineral, dan kapasitas produksi.

Perencanaan dan Penjadwalan

Aljabar linear juga berperan dalam perencanaan dan penjadwalan kegiatan pertambangan. Dengan menerapkan teknik pemrograman linier, insinyur dapat merancang rencana operasi yang efisien, mengalokasikan sumber daya dengan optimal, dan meminimalkan waktu henti. Ini sangat penting untuk memastikan bahwa semua kegiatan dilakukan dalam kerangka waktu dan anggaran yang telah ditetapkan.

Simulasi dan Model Dinamis

Dalam teknik pertambangan, seringkali diperlukan simulasi untuk memahami bagaimana sistem beroperasi dalam berbagai kondisi. Aljabar linear mendukung pembuatan model dinamis yang dapat memperhitungkan perubahan dalam variabel, seperti permintaan pasar, biaya energi, dan peraturan lingkungan. Model ini membantu insinyur untuk merencanakan dan merespons perubahan dengan lebih baik.

Kesimpulan

Secara keseluruhan, aljabar linear merupakan alat yang esensial dalam teknik pertambangan. Dengan kemampuannya untuk menganalisis data, memodelkan sistem, dan mengoptimalkan proses, aljabar linear membantu insinyur pertambangan untuk membuat keputusan yang lebih baik, meningkatkan efisiensi operasional, dan mengurangi dampak lingkungan. Seiring dengan perkembangan teknologi dan data, pemahaman yang mendalam tentang aljabar linear akan terus menjadi keterampilan yang sangat berharga bagi para profesional di bidang pertambangan.

References

Lay, D. C. (2012). *Linear algebra and its applications* (4th ed.). Pearson.

Lay, D. C. (2012). *Linear algebra and its applications* (4th ed.). Pearson.

Eco Industry
Oriented University

ALJABAR LINEAR

Teknik Pertambangan

Penulis ;
Bakti Siregar, M.Sc., CDS.

Edisi Pertama